OPUSCOLI MATEMATICI

OPUSCOLI MATEMATICI

COMPOSTI RACCOLTI ED ORDINATI

DAL

Cav. Vincenzo Flauti

Professore di Analisi sublime nella R. U. degli Studj di Napoli, Segretario della R. A. delle Scienze, ec.

VOLUME IV.

IN NAPOLI
Nella Tipografia per le opere del prof. Flauti
1840.

PREFAZIONE

Quum publicis muneribus magna ex parte essem aliquando liberatus, retuli me ad ea studia, quae retenta animo, remissa temporibus, longo intervallo intermissa revocavi.

Cic. Tusc. l. I. §. 1.

Nel 1810 concepii l' idea di raccogliere le principali cose, che dal Fergola, e da' valenti allievi dell' antica sua scuola eransi, con gran lode di questa, e merito de' loro autori, date fuora, altre aggiugnervene che l' opportunità avrebbe somministrate, e tutte insieme pubblicarle. Uno degli scopi al quale mirava con quest' intrapresa era quello di spingere il Fergola stesso a concorrervi, permettendo di estrarre alcuna ricerca più importante da' suoi preziosi MSS.; che non vedeva altramente speranza di ciò ottenere. Manifestato questo pensamento al mio collega Giannattasio, e poi insieme al Fergola, il trovammo assai più condiscendente, che non credevamo, essendosi ancor compromesso dirigere la nostra scelta. Cominciammo dunque a dar fuori un primo volume di *Opuscoli* relativi ad argomenti difficili di Geometria, e di

Analisi, che ben accolti dal pubblico, ne fu esaurita in picciol tempo l'edizione. Dopo ciò ne venne interrotta la continuazione dall' impegno in cui si pose il Fergola di compiere il *trattato analitico delle Curve Coniche*, che vide la luce nel 1814, e fu poco dopo seguito dall'altro de' *Luoghi geometrici analiticamente trattati*; non che dalle *Memorie*, ch' egli, per mezzo mio, presentò alla R. A. delle Scienze, e che veggonsi nel vol. I. degli Atti di questa: come ancora dalle mie moltiplici occupazioni, e dalle continue ristampe del *Corso Matematico*, al quale stava occupandomi, e che con sommo dispiacere non ho potuto ancor compiere.

In tutto quest' intervallo di tempo non rimanemmo però affatto oziosi nè io, nè i miei colleghi; e varie ricerche furono trattate in nostra Scuola, e talune pubblicate, o negli Atti della stess' Accademia, o separatamente, che incontrarono il gusto di sommi matematici stranieri.

Cresciuto molto questo materiale, sarebbe stato conveniente continuare gli *Opuscoli*: ma il Fergola non era più, e la sua Scuola avendo perduto questo riconcentramento, non v'era chi la rannodasse: continuavano inoltre per me ad aver luogo gli stess' impedimenti poco fa detti, che ne' migliori anni di mia vita, con più che giovanile consiglio, mi hanno deviato bastantemente dalla scienza, che sola mi aveva proposto per iscopo da principio: sic-

chè reso ora più prudente dall' età , ritornato su' miei passi per rimettermi nel sentiero dritto, e proponendomi molte cose , temo non abbia ad avvenirmi quello che diceva il divino Archimede di Conone, di aver iscelto, cioè, tempo ad eseguirle pochissimo idoneo . Un' ultima occasione ha però prodotto finalmente quel buon effetto , che in altro modo non sarebbesi forse mai ottenuto : essa è stata il programma da me dato fuori nella fine dell'aprile del passato anno , col quale , ad oggetto di far terminare le inutili e nojose dispute sulla prevalenza di un metodo all' altro nell' inventar geometrico , proponeva a' miei soli compatrioti cultori delle Matematiche , tre quistioni , che sembraronmi assai atte all' uopo , e che sarebbero state di compimento a ricerche difficili già fino a certo segno prodotte in nostra Scuola. Nè in ciò fare presi tra essi in mira uno, o un'altro solamente; sicchè posso però, con più ragione che Gio. Bernoulli , dire : *Si problemata subinde eruditis propono , scopus mihi non est aliorum capacitatem tentandi ; sed unice ut ingenia excitentur , novumque capiant incrementum scientiae* (Act. Erud. Lip. 1698 , oct. p. 466) .

Or prima di pubblicarlo avendolo letto alla nostra Accademia, stimando ciò mio dovere verso di essa , questa ne rimase sì soddisfatta , che dal presidente , e segretario perpetuo estrinsecossi in nome di tutt' i socj , che

tal programma non si desse fuori da me , ma dall' Accademia , la quale avrebbe così adempito questa volta all' obbligo che ha di proporne uno per ogni triennio , con offrire essa quel premio a concorrenti , che con più restrizione io mi proponeva dare ; e mi si spingeva a presto stamparlo . Ma hanno ancora il loro fato le scientifiche intraprese ; e senza che stia a tessere la storia di ciò che in seguito avvenne , basterà per l' oggetto dire , che ritornò la faccenda ne' termini ne' quali l' aveva la prima volta proposta all' Accademia , cioè di ottener da essa, che si fosse solamente occupata a ricever le risposte al programma , e farle esaminare dalla sua classe di Matematiche , addicendo i premj a coloro che , a giudizio de' miei colleghi di tal classe , ne sarebbero risultati meritevoli ; serbando per me interamente la cura di rilevare, dalle soluzioni date , le conseguenze relative allo scopo propostomi col programma , come sopra ho indicato . Nè ciò mi dispiacque , nè valse a rimuovermi dal proponimento , dal quale mi auguro raccogliere qualche cosa di buono, ed importante pe' progressi della scienza, e pel miglioramento della istituzione della gioventù nostra che la coltiva .

Una tale circostanza avendomi obbligato a gettar lo sguardo su tutto quello che si era da me , e da' miei colleghi nella Scuola del Fergola fatto , e che tendeva allo

stesso scopo men manifestamente . mi ha risvegliato il pensiero della raccolta degli Opuscoli di essa, altra volta intrapresa : se non che , dovendo ristampare i già pubblicati fin dal 1810, miglior consiglio ho stimato quello d'interamente da capo rifonderli, aggiugnendovi, compiendoli, e con altre materie affini accompagnandoli ; dando pure ad essi un ordinamento più proprio, e facendo tutto ciò servire ancora ad illustrare l' oggetto importante , che nel programma mi aveva proposto . E poichè la bisogna esigeva , che questo innanzi alle altre cose si desse in luce , non dovrà sembrare strano, se dovendo esso costituire, secondo l'ordine che ho creduto conveniente, il vol.IV della raccolta intera di Opuscoli , si vegga un tal volume innanzi i precedenti pubblicare , ne' quali però stimo conveniente da ora indicare quali materie si conterranno , senz' affatto incaricarmi de' volumi seguenti , in cui posso solo da ora accennare, che verranno trattati principalmente argomenti relativi alla moderna Analisi, o con essa condotti a fine. Adunque :

Il Vol. I. diviso in due parti, conterrà, nella I^a: *Alcune dissertazioni geometriche*, e *su' Metodi in Matematiche* , per servir d' introduzione a tutta la *Raccolta di Opuscoli* : e nella II^a : *I problemi delle Inclinazioni universalizzati* dal *Fergola* ; ed una *serie di difficili problemi solidi ed ipersolidi* risoluti elegantemente dal *Bru-*

no, e dal *Grimaldi* , nostri distinti professori , altra volta pubblicati , da' medesimi diligentemente riveduti ; ed a' quali altri ne verranno pur aggiunti .

Il Vol. II. anche diviso in due parti, comprenderà nella I^a : *I problemi de' contatti circolari risoluti con nuovi artifizj elementari di Geometria dal Fergola* ; e del principale di essi ne sarà anche esibita un' elegante soluzione dello *Scorza*: e quelli de' *Contatti sferici* in simil guisa da me risoluti . Vi saranno recate le composizioni alla maniera degli antichi ; e premessa la storia critica di tali due famiglie di famigerati problemi , con l' analisi e 'l parallelo delle diverse soluzioni , che ne sono state date per lungo spazio di tempo , da sommi matematici , con l' uno , e l' altro metodo.

La II^a parte poi comprenderà l' altra famiglia de' problemi della *piramide triangolare* , e principalmente le soluzioni di quello che può dirsi primo tra essi , orditevi da me , dallo *Scorza*, dal *Lhuilier* ; e quella del *Bruno* , per un tal problema universalizzato , seguita dalle ricerche fatte su questo dal sig. *Hachette* , distinto matematico francese testè tolto alla scienza , che con tanto buon successo coltivava , e promoveva ; la qual perdita molto mi duole . Vi sarà anche premessa la storia critica di esso problema, ove si esporranno le diverse vie tenute in risolverlo , nessuna omettendone , e gli equivo-

ci in cui si era più volte caduto sulla natura del medesimo, da trarne regola onde evitarli in altri casi affini.

Il Vol. III., pur diviso in due parti, conterrà nella I^a^ la storia critica del celebre problema del *Cramer*, e le soluzioni principalmente del *Giordano*, e dello *Scorza* per lo stesso esteso dal triangolo al poligono; terminandone anche le soluzioni con le corrispondenti costruzioni ne' diversi casi del problema: arrestando un tale argomento là dove si era giunto fino alla pubblicazione del programma. Ond' è che il compimento delle ricerche sul medesimo, non solo per ciò, che nel primo quesito di quello fu dimandato, ma ancora per nuove ed eleganti soluzioni, anche riguardo al poligono, ed alle curve coniche in generale, si troveranno nella parte II^a^ del presente volume. E questa potrà quindi, per ora, considerarsi compiere quanto riguardava il problema del Cramer universalizzato, e quelli delle *Tazioni*; ed in modo, a mio credere, da non lasciar altro a desiderare.

La II^a^ parte di questo volume è destinata poi alle ripetute ricerche sul problema del *Cilindroide Wallisiano*, fatte dal *Forte*, dal *Giannattasio*, dal *Sangro*, da me, e finalmente dal *Fergola*; il quale diede al problema relativo alla misura della superficie di questo solido la massima estensione, risolvendolo con metodo analitico diretto. E tutti questi lavori saranno pur prece-

duti dalla corrispondente storia critica. Vi sarà in fine aggiunta qualche cosa sul solido *cilindroide*, perchè tutto ciò che il riguarda per le sue dimensioni, si trovasse compiuto, ed insieme raccolto.

Cosa contenga il presente vol. IV, si è già indicato: ma volendone maggiori particolari, si potranno ricavare, per la prima parte di esso, dal breve discorso premessovi dagli editori, che leggesi qui appresso, dalla *Dichiarazione* innanzi al *programma* a pag. IX e X, e dalle *Considerazioni geometriche* aggiunte ad esso a pag. 34 e 35, ed altrove; e verrà poi meglio dichiarato allorchè, come spero, sarà di breve pubblicata una tal II[a] parte.

Nè credo inutile riportare una brevissima esatta notizia di que'tra'nostri matematici che or più non sono, qualora tratterò la prima volta un qualche loro lavoro: poichè quando ciò sia in modo fatto, che segni il cammino da essi seguito nell' apprendere, e coltivare le nostre scienze, non pur riesce decoroso, e grato a' loro concittadini; ma eziandio serve utilmente, a mostrar la strada per distinguersi, a coloro che s'intruducono allo studio di esse.

PRODUZIONI

RELATIVE AL

PROGRAMMA

DI TRE QUISTIONI GEOMETRICHE

PROPOSTO DA UN NOSTRO PROFESSORE.

Mathematici partibus defungitur, non qui aliorum inventa exscribere, memoria tenere, aut recitare data occasione potest; sed qui ab aliis proposita, invenire et eruere novit ipse.

JAC. BERNOULLI.

IN NAPOLI
Nel marzo del 1840.

GLI EDITORI

La presente raccolta di *Produzioni relative al programma* dividesi da se stessa in due parti, la prima occasionata dalle circostanze de' tempi nel nostro paese, in cui quello fu proposto, dirigendolo l' autore di esso a' suoi connazionali, per far terminare (come chiaramente vi si espresse, e dalle diverse scritture comprese in questa raccolta ben rilevasi) le vane dispute di prevalenza di metodi geometrici, e quindi rimettere la scuola napoletana sul retto cammino di coltivarli tutti con eguale studio, e sapersene all' uopo prevalere, ora separatamente adoperandone alcuno, altra volta a proposito combinandoli, a fin di ottenere la più facile ed elegante soluzione di un problema. E poichè nell' ordinaria istituzione geometrica attuale troppo si va deviando dalla sicura e riconosciuta via segnata dagli antichi, alla quale tutt' i moderni matematici più saggi hanno applaudito, era però ben giusto, che nel programma non si tralasciasse di raccomandarla.

Siffatto lodevole procedimento, e le buone e sincere

intenzioni dell' autor del programma dispiacquero ad alcuni pochi nostri professori , che mirando a privato vantaggio di loro scuola , hanno proclamato alla gioventù l' abbandono di ogni antica istituzione , limitandosi alle imperfette conoscenze del metodo analitico puro : che di certo un tal metodo connesso col Cartesiano da cui deriva, e quindi con quello che mirabilmente usarono i greci maestri , utilissimo può pur riescire ; ma vano è sperarne vantaggio, se senza un tal necessario antecedente corredo d' istruzione si affronti , e che non sia sulle basi di una buona geometrica istituzione fondato . E però da coloro , a toglier di mezzo ogni inciampo , si è gridato , essere assai grande errore l' attribuire agli antichi un metodo d' inventare in Geometria : che tutto quello ch' essi ci hanno lasciato di grande, e sublime in questa scienza , ed in cui per alcuna parte ancora i moderni non hanno potuto agguagliare co' loro metodi , sia stato un puro caso , ed un vano arzigogolar delle loro menti : che la costruzione ne' problemi geometrici non sia necessaria , che però valga lo stesso una o un' altra soluzione , una o un' altra equazione cui si pervenga ; giacchè il calcolo aritmetico rimedia a tutto ; che sia lo stesso l'adoperare in un problema la Geometria elementare , o il calcolo elementare , che quello degl' infiniti ; e quindi essere inutile il trattar con que' mezzi le rettificazioni , le

quadrature, i massimi e minimi, per la determinazion de' quali ogni scienza togliesi agli antichi, ed altre ricerche affini, di tal che per essi l'esattezza geometrica val quanto la più imperfetta approssimazione aritmetica; che anzi manifestamente la dicono cosa del tutto ideale. Inoltre, che non seppero que' nostri maestri distinguere i casi, e le diverse soluzioni di un problema, nè classificarli, *cc. ec. cc.*

Or per siffatte erronee nozioni, dovevano naturalmente commuoversi costoro all' apparir del programma; quindi essi, temendone il disfacimento di loro scuola, contro gli si rivoltarono indecentemente attaccandolo (*).

(*) Oltre le insulse, e puerili proposizioni de' contraddittori al programma relative a scienza geometrica, ve n' ha due che risguardano personalmente l'autore di esso; all' una delle quali, quella cioè che lo avesse proposto loro a disfida, ha creduto egli con dignità rispondere, nella *dichiarazione* premessavi nel ristamparlo: ma dell' altra, che lo avesse fatto a *procacciarsi merito*, non avendo stimato di suo decoro tenerne alcun conto, ci permetteremo noi qui ragionarvi brevemente sopra, e per quel poco, che a caso n'è potuto giugnere a nostra notizia.

Or se coloro non limitassero ogni conoscenza al giorno di jeri, osando poi francamente parlare senz' alcuna cognizione di fatti, non avrebbero certamente ignorato, che l' autor del programma, contando appena gli anni 20 di età, fu, nel 1803, con esempio straordinariissimo, chiamato a professar le Matematiche nella nostra R. U. degli studj, associandolo al di lui distinto maestro Fergola; e da quell' epoca ha poi sempre goduta nel suo paese la pubblica stima, della quale ha cercato in varj rincontri profittare a vantaggio de' professori della sua scienza, che ha sempre considerati come suoi colleghi e collabo-

Nè però sarebbesi loro dato ascolto, se la società fosse composta di scienziati, e specialmente matematici, e se ne'pre-

---

ratori, migliorandone la condizione, procacciando ad essi decoro, e comodità, onde le Matematiche, le quali generalmente, ma più presso noi non sono di gran profitto, fossero maggiormente coltivate. Ed egli si è pur ingegnato sempre di meritarsi co' suoi lavori pubblicati l' attenzione non solo de' matematici concittadini, ma anche di taluni più distinti d' Italia e d' oltremonti, co' quali ha tenuta regolare corrispondenza, e tra' primi *Paoli*, *Pessuti*, *Ruffini*, *Brunacci*, *Tramontini*, *Franchini*, *Magistrini*, *Libri*, *Mussotti*, *Giorgini*, *ec.*, tra gli altri, *Lhuilier*, *Hachette*, *Crelle di Berlino*, *Brandes di Breslau in Islesia*, *Degen di Copenhagen*, *Babbage in Londra*, *ec.* Che i compilatori della *Biblioteca Italiana* pubblicando, nel proemio al V.° anno di questa eccellente opera periodica, un' indicazione di ciò che nel 1819 erasi fatto in Italia, intorno a lettere, scienze ed arti, così dissero di noi: » Il regno delle due Sicilie ci » presenta in Napoli il celebre Fergola, ed il suo allievo sig. Flauti, il mag» gior comentatore di Euclide, il più esimio coltivatore della Geometria degli » antichi «. Che i più distinti ed accreditati giornali d' Italia, e stranieri, principalmente di Francia, e di Germania, hanno sempre con molta lode parlato di ogni sua opera, e tra que' primi non dee considerarsi di piccol momento quello del Brugnatelli, per l' articolo fatto inserire in esso dal Brunacci, e da lui compilato, sulla *Geometria di Sito*; e che ha egli prodotti dalla sua Scuola non pochi allievi distinti, che ancor essi onorano non poco la scienza, ed il nostro paese, con l'insegnamento, e le loro opere. Che alcuni suoi lavori hanno meritata la considerazione del nestore de' geometri ed analisti di que' tempi Lhuilier, e del distintissimo e laborioso matematico francese Hachette, i quali entraron pure nell' impegno di continuarli. Da tutto ciò, chi ha buon senso rileverà certamente non aver egli bisogno di procciarsi merito nel modo strano, ed indecente di cui solo i contraddittori possono esser capaci, ma proseguendo que' lavori da lui cominciati, che utili riesciranno certamente alle Matematiche, tra' quali con estremo desiderio attendiamo la continuazione del *Corso di Analisi algebrica*, di cui con piacere sommo vediamo fatta distinta menzione nel *Dizionario di Scienze Matematiche pure ed applicate pubblicato di recente in Francia*.

senti tempi non prevalesse presso noi il costume, che ognuno con un poco di Geometria, e di Algebra ancor male appresa, o pur conoscendola solamente a nome, non si tenesse in caso di decider de' metodi, ignorando anche il vero significato di questa voce: di tal che oggigiorno le parole *analisi*, e *metodo analitico* stanno per le bocche di tutti coloro che non intendono affatto ciò che dicono, e pur l' accoppiano, come se profferissero magiche voci, stranamente ad ogni cosa.

Ecco dunque le ragioni che hanno dato luogo alla prima parte della presente raccolta, interamente propria, e particolare pel nostro paese, e nell' attuale circostanza necessaria a preservar la gioventù dagli errori, in cui alcuni pochi pessimi istitutori cercano trascinarla, a titolo di facilità di loro istituzione; non che pe' buoni principj di scienza, gli esatti paralleli di metodi, ed alcune ricerche le quali vi sono chiaramente esposte. Di essa le prime due cose che la compongono, cioè il *Programma* ristampato identicamente alla prima pubblicazione che ne fu fatta, con esservisi solo premessa una *Dichiarazione* dignitosa, per dileguare le strane e poco decenti imputazioni sognate da taluni per contraddirlo,

---

da una società di antichi allievi della Scuola Politecnica, e che sta attualmente traducendosi e stampandosi in Firenze; e nel quale non tralasciasi ancora in altri articoli, come cade in acconcio, di fare lodevol menzione degli altri suoi lavori.

con in fine alcune noterelle tendenti allo stesso scopo, e le *Considerazioni* che il seguono, il cui principale oggetto è dichiarare la qualità, e il merito de' *quesiti*, e ciò che su di essi erasi già fatto da distinti matematici, appartengonsi a chi il propose. Gli altri due lavori, l'uno col titolo di *Analisi critica*, l'altro d'*Indice critico*, sono stati da noi fatti per conseguir l'oggetto sopraindicato; al qual solo titolo giudicati non inutili dall' autore del programma, ha però acconsentito, che qui s' inserissero: e noi speriamo, che il pubblico, riguardandoli ancor esso per questo solo verso dell' utilità, voglia ben accoglierli.

L'altra parte poi concerne direttamente il programma, recandovisi per ora le risposte a' primi due quesiti di esso, e le conseguenze che il proponente aveva promesso ricavarne. Sarà tutto ciò preceduto dalla *relazione* presentata all' Accademia delle Scienze dal suo segretario prof. *Flauti*, intorno alle risposte date a' quesiti di quello; dalla quale, oltre l' oggetto principale di far conoscere il merito di queste, il giudizio sulle medesime profferito dalle classe matematica, ed i ragionati motivi del premio addetto a quelle tra esse, che ne saran risultate meritevoli, non ultimo scopo sarà di far rilevare lo stato attuale della istruzione matematica in tutt' il nostro regno; il che potrà servire di norma a coloro che regolano gli affari di nostra P. I., per vedere se alcuna

cosa convenga porre in opera per raddrizzare, e sostenere l' insegnamento di queste sublimi scienze. A tutto ciò sarà premesso un lavoro dello stesso sulla: *Determinazione ne' problemi geometrici*, nel quale egli, con esempj tratti dalle opere degli antichi, e de' moderni che hanno camminato sulle loro orme, messi al confronto de' medesimi trattati col metodo Cartesiano, e con precetti ricavati dalla natura de' problemi, e da' metodi per risolverli, sparge su questa difficil materia, ed importante per la compiuta soluzione di essi, alla quale minor attenzione si è fatta di che convenivasi, luce bastante a diradar le tenebre che offuscano le menti di taluni, i quali di presente fanno consistere tutta la scienza dell' invenzion geometrica, nel meccanismo di una qualunque soluzione, senza brigarsi affatto di conoscenza diretta, e precisa sulla natura de' geometrici problemi: di che i loro dubbj, e le erronee proposizioni sul terzo quesito del programma offrono chiarissima prova. E per costoro sta bene, che qualunque problema propongasi sia considerato per un puro e semplice esercizio di scuola, come sogliono sempre esprimersi: ma non diffidiamo, che dopo tutto ciò, persuasi del loro equivoco, non riconoscano da' problemi nuovi proposti aver sempre avuto origine il perfezionamento delle Matematiche, e l'invenzione, ed il progresso de' metodi, come la storia di queste scienze, a chi le

coltiva , ad ogni passo indica ; ed il presente programma ne offrirà ancora un altro argomento .

Or in vista dell' utilità che potrà ricavarsi da questo tentativo , fatto per promuovere sempre più le Matematiche nel nostro paese , osiamo confidare , che vogliano i sommi uomini, che al presente con tanto successo coltivano le scienze esatte, compatire i nostri sforzi , e compensarci della villana maniera come sono stati questi , già appena annunziato il programma , e non ancora conosciute abbastanza le quistioni in esso proposte, contraddetti da pochi , cui nè men per ombra pensavasi offendere ; che ben lontano era l' autor di esso , il cui carāttere è stato in tutta la sua carriera quello di giovare , e compiacere a chi coltivava la sua stessa scienza , più ancora se a sua cooperazione promosso ad insegnarla , dall' immaginar cosa che potesse ritornare a menomanza di stima di qualunque de' suoi concittadini ; che sempre questa risulterebbe a disdecoro della sua patria , non mai stata scarsa di uomini distinti , ed assai valutati anche dallo straniero. Ed il pubblico imparziale , sol curante di ciò , ch' è scienza , abborrendo sempre le aggressioni fatte per semplice maltalento , che subito dimostrasi , quando quelle veggansi senza ragione , e con poca decenza operate , potrà decidere in merito di una tale contesa , solamente leggendo la nostra *Analisi critica* , e l' *Indice critico.*

PARTE PRIMA

PROGRAMMA

E

DISPUTAZIONI SU DI ESSO.

PROGRAMMA

DESTINATO A PROMUOVERE E COMPARARE

I METODI PER L' INVENZIONE GEOMETRICA

presentato

A' MATEMATICI DEL REGNO DELLE DUE SICILIE

nell' aprile del 1839.

e di nuovo riprodotto nell' ottobre seguente, con la giunta di alcune noterelle giustificanti.

DICHIARAZIONE

PER LA PRESENTE RISTAMPA DEL PROGRAMMA.

Pacis et concordiae studioso satius esset injurias vincere ferendo, quam odiosas contentiones obire ulciscendo. Verum cum patientia nostra pro ignavia habetur, silentium pro confessione criminis, et nuperam calumniam jam nova sequitur contumelia, omnino respondendum est, ne nobismetipsis deesse videamur.

Taylor - *Apologia ec. — Transact. 1719.*

Alcuni giorni dopo la pubblicazione del programma, un nostro giornale produceva innominato avviso, di non doversi tener conto del terzo quesito proposto, e così espresso: *Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide*; perchè *più che determinato, ed impossibile*: la quale sola combinazione di condizioni non congruenti, bastando a mostrare l'imperizia geometrica degli autori dell'avviso, nessun ascolto fu però ad essi dato.

Presentatesi in Accademia, nella prima tornata del passato agosto, alcune risposte al programma, credei conveniente di preparare a' miei colleghi della classe matematica ciò, che poteva agevolare ad essi il giudizio a pronunziare su quelle risposte; e però lessi nella seconda tornata di tal mese alcune mie *Considerazioni su i tre quesiti proposti a premio*, che saranno quì appresso pubblicate.

Comparve allora dopo pochi giorni una risposta al programma, cioè a' primi due quesiti di esso; e pel terzo, rivenendosi dall'erronea manifestazione a caso avventurata, si tacciava solamente per mal proposto, e però, a non perder tempo, si tralasciava, senza nè men degnarlo di correzione. E siffatta scempia produzione non mancò di chi fosse pari ad accoglierla.

Rimasti ancor questa volta senza risposta, lasciandosi giudicar al pubblico del merito di un tal lavoro; e volendone assolutamente una coloro, che si dimostravano sì accaniti avverso un tal mio operato, che a dir vero non credeva dovesse sì esacerbar ad essi la bile, pubblicarono in terzo luogo una impropriamente detta *prefazione* all'opuscolo già dimenticato. Ed in questa si disputava di metodi con franchezza incredibile; e non pur de' geometrici, a' quali solamente io mi limitava nel programma; ma tutti ad un tratto comprendendoli in un fascio, e di tutti dando giudizio in brevi note, e pesando nella loro rozza bilancia il merito degli antichi e de' moderni geometri, e se più valesse Newton che Archimede, e più de la Grange di quello: e quando mancasse alcuna dramma a compiere la misura di loro autorità, non mancavano d' improntarla da taluno anonimo autor moderno, che a qualche loro collega l'avesse comunicata in secreto. Ed è degno di particolare avvertenza trovarvisi spesso attribuito a sommi matematici

ciò , che mai poterono pur immaginare ; poichè contrario alla lor mente, e ad ogni ragion geometrica : e non dee far però maraviglia , se ancor a me si faccia dire nel programma talune cose, che non solamente non le pensai giammai ; ma che anzi vi ho dimostrato un intendimento tutto diverso . Che però io non trovo miglior espediente, per mostrare al pubblico la falsità di sì impudenti asserzioni, che quello di riprodurre , senza il minimo cambiamento , il programma stesso , permettendomi solo aggiugnervi qualche nuova noterella , indicandola con lettera, e ponendole insieme in fine del medesimo : ed abbandono dopo ciò questa faccenda troppo troppo puerile all' imparziale giudizio del pubblico, pel cui rispetto solamente mi sono questa volta indotto a scrivere .

Una cosa rimane a me tutta propria , ed è di togliere a que' spontanei contraddittori al programma ogni sospetto , che io avessi voluto con questo gettar loro il guanto di una disfida ; il che non so persuadermi ancora ch'essi potessero di buona fede pensare : e m'induco piuttosto a credere , che ponessero ciò innanzi ad iscusare il loro mal animo , e forse mi si permetta dirlo , per prendere occasione d' *inclarescere inimicitiis*. Ed in vero qual motivo poteva mai indurmi a discendere a simile bassezza ? Che forse coloro, cui è tornato conto di ciò malignamente asserire , potevano ignorare esser io alla fine di mia lunga carriera, essi nel principio, o sta-

zionarj a mezzo il corso; tener io, ed aver sempre tenuti, da che cominciai a professar le Matematiche, e sono gli anni parecchi, i primi gradi a'quali un uomo di mia classe possa aspirare; aver io istruiti, e promossi tanti, che ora con dignità seggono in cattedre, o in accademie, il che non possono, senza ingratitudine, negare essi medesimi,che ora verso me conduconsi con tanta indecenza. Inoltre aver io cercato di esimermi da nuovi incarichi, e nuove commissioni, facendo ciò tornare a loro vantaggio. Finalmente essermi, ne' diversi rincontri, sempre adoperato a far acquistare riputazione e nome a coloro, che cercano spingersi nell'ardua carriera di professar le Matematiche, pubblicando anche talvolta a mie spese qualche loro lavoro.Qual ragione avrei dunque avuta ora, che cerco assolutamente chiudere la mia carriera, di uscire in mezzo a sfidare i miei concittadini coltivatori della stessa mia scienza, per volontà di demeritarli? Il mio unico scopo è stato ed è, il ripeto, per tentare se mai fosse possibile di far terminare tante vane dispute su' metodi in Geometria, che assai pregiudicano a' progressi delle Matematiche, ed alla buona istituzione in esse, che di giorno in giorno va presso noi decadendo. Nè vi sarà alcuno certamente tra' miei colleghi, che oserà in ciò smentirmi,osservando quanta sia ora la difficoltà di provvedere gli stabilimenti d'istruzione di buoni professori di Matematiche, mentre prima se ne abbondava; ed il vedere quanta sia la po-

chezza di conoscenze matematiche di coloro, che agli esami a' gradi accademici presso la R. U. degli studj si presentano, o ad altri per l' esercizio di professioni, che delle Matematiche abbisognino, sebbene elementarissimi, e tali al certo, che un tempo non avrebbero dato alcun pensiero a' più mediocri allievi di nostre scuole. E sono d' ordinario coloro, che da taluna delle attuali vengono pieni di orgoglio, e poveri di scienza, vantando sublime istituzione, e disprezzando l' antica senza conoscerla, che veggonsi ignorare fin le nozioni più comuni, che non v' ha giovine di prima istituzione con regolar metodo, che non conosca perfettamente. Di che credo inutile aggiugner particolari, non essendovi tra noi chi non ne convenga.

Io non ho più una scuola a me propria, come l' ebbi fino al 1812, essendone usciti non pochi, che, come ho detto, or tengono posti distinti, e che a quell' epoca dismisi, non tanto per mancarmi il tempo di bene assisterla, che per non comparire soverchiamente avido, e compromettere il mio decoro, facendo da esaminatore di coloro stessi, che aveva prima istituiti; giacchè a quell' epoca mi ritrovava in tutte le commissioni di esami per promozioni ad impieghi sì civili che militari. Lo so pur troppo, che ora da altri non pensasi a questo modo; ma io vissi in quel tempo, e però errai con gli altri miei coevi di allora; il mio errore fu però vantaggioso al pubblico;

poichè nè si usavano deferenze negli esami, nè si vedevano in conseguenza di esse le pubbliche istituzioni del Governo depravate, ed andate a male. Non avendo dunque una scuola, e volendo, per quanto a me potesse riescire, cercar di rimettere in buon cammino l' istituzione, non seppi, col mio corto intendimento, vedere altro mezzo, che quello di ricorrere al programma che proposi. Mi sarò forse ingannato, ma di buona fede, ed a mio non altrui danno; e senza offesa di alcuno de' buoni professori, de' quali non è interamente estinta presso noi la sementa, e che con me deplorano un falso sistema, che altri vogliono a forza di pompose, ed audaci parole sostenere. Nè poi era questa la prima volta che io aveva manifestate le mie idee, e tenuto lo stesso linguaggio di ora; e tra le altre noterò quella in cui pubblicai fin dal 1822, dopo averla presentata alla nostra Accademia, una dissertazione *sul metodo in Matematiche*, *sulla maniera di scrivere e compilare gli Elementi di queste scienze*, *e sull' insegnamento delle medesime*; che avrebbero pur dovuto, i poco decenti risponditori al programma, degnarla di un loro sguardo, prima di spingersi a mal dire. Si avrebbe avuto forse più ragione d' incollerirsi allora, che non dovevasi adesso, perchè ho proposte ad esercizio tre quistioni, vòlendo così anche profittare delle altrui ricerche, per compiere argomenti in nostra scuola utilmente, e ripetute volte trat-

tati: ma a quel tempo, il decadimento non era ancor giunto al segno di ora; ed a' buoni istitutori non si altera la bile perchè la scienza si rianimi; anzi ciò torna a loro conto ed essi il desiderano. Ed è ancora per siffatta ragione, che ho scelto per trattato della mia cattedra, nel prossimo anno di lezioni, il seguente: *Disquisitiones analyticae in methodos geometrico-algebricas*. Si vorrebbe con ciò forse imputarmi, che volessi sfidare il pubblico napoletano per intero? nò certamente il protesto, io non voglio che compiere la mia carriera istruendo, e lealmente, non imposturando, come si costuma da alcuni oggigiorno; io fo guerra al falso ed erroneo metodo d'insegnare, e cerco di sostenere e convalidare il buono, che un tempo ha prodotti in gran numero uomini distinti. Potrà avvenire che, per le mie deboli forze, non riesca; ma avrò fatto il mio debito, e meriterò se non lode, almeno di esser compatito da' miei concittadini, conoscendo, che dopo aver per tanti anni insegnato, e cercato promuovere in ogni modo l' istituzione matematica nel mio paese, per non veder poi distrutta ogni buona opera del Fergola, e de' miei colleghi, mi sono anche esposto ad esser martirizzato da coloro, che al presente fanno dell' istruzione della gioventù mercato.

Siffatta protesta, servirà anche di risposta alla troppo avvanzata dimanda, del perchè io avessi limitata la mia proposta a' soli miei concittadini. Io non era sì au-

dace da tentar tutta l' Europa: nè poi vedeva altrove quel bisogno, che scorgeva nel mio paese; poichè anzi ben mi accorgo coltivarsi da per tutto, con sobrietà e giudizio, ogni metodo d' inventare, e prodursi lavori giudiziosi, da indicar veri progressi di nostra scienza, non retrogradamento. Ma poteva darsi, ecco un' altra sciocca sfuggita de' contradditori al programma, che tra noi non si fosse trovato chi avesse potuto trattar le quistioni con l'analisi pura, alla quale non so perchè si pretende assolutamente che io miri a far torto; ed allora come giudicare della prevalenza de' metodi? Al che risponderò brevemente, col dire, che professo le Matematiche da ben quarant' anni nel mio paese, e sono necessariamente in mezzo ad esse, e non ignoro perciò tutto quello che le concerne; e quindi ben mi attendeva, da' contraddittori al programma, non una risposta d'ingiurie, che non sono se non indizio di debolezza e di mal animo, ma una risposta giudiziosa. E poi io aveva però scelte quistioni a diverse riprese trattate da sommi uomini, sul cui valore ne' metodi non cadeva alcun dubbio; e da questi più che da altri avrei tratto, e trarrò materiale ubertoso pel parallelo che mi ho proposto, e che prego ad attendere che lo esponga, e non giudicarmi alla cieca così senza conoscerlo, imitando un nostro concittadino, autore pur esso di alcune produzioni matematiche, alle quali mai alcuno rivolse lo sguardo, che cominciò una sua diatriba contro l'*Intendi-*

mento umano del celebre Giovanni Locke, protestandosi di non averlo letto; d'immaginarsi però ciò che potesse dire.

Ma alle ragioni poc' anzi accennate, e che mi avevano determinato alla scelta di queste tre quistioni, or posso con sicurezza aggiugnere, che mai altre si potevano meglio prestare allo scopo prefissomi, a cagione delle nuove escogitazioni derivate dalle ricerche in esse fatte, tendenti a rischiarare la loro natura, e quella de' problemi in generale; e ad abbattere tutti gli errori, che nella risposta al programma si sono, per imperizia geometrica, propalati. Ed i moderni geometri ed analisti, che desiderano, come me, veri progressi delle Matematiche, e vi si adoprano con infinito studio, vedranno con piacere, e sorpresa, non pur d' essersi adempito al primo quesito nel modo strettissimo dimandato; ma ancora assegnata di quel problema un' elegante geometrica soluzione, non dipartendosi dagli stessi principj dal de la Grange adoperati, per semplicemente avviare la sua, che di tanta difficoltà in costruirla era stata giustamente riputata, da' più distinti matematici. E si vedrà pure, non senza gran soddisfazione, un problema sì difficile, nel caso semplicissimo del triangolo e del cerchio, esteso alle curve coniche ed al poligono in generale, tanto con l' antica, che con la moderna analisi, senza dipartirsi dalla soluzione assegnata per quel primo ca-

so, riducendone la costruzione all' operazione geometrica la più elementare. Finalmente avvertiranno essi la proteiforme natura di tal problema, che con una singolarità tutta propria, e stranissima, ne' diversi casi, salta ad un tratto da determinato a più che determinato, e da questo ad indeterminato, senza nè men passare pel grado intermedio. E così da esso solamente potranno i risponditori al programma, con più chiarezza rilevare i loro errori manifestati sulla natura del terzo quesito.

Nè meno importanti, e grate a' geometri dovran riescire le ricerche sul secondo quesito, di cui ne appariranno due eleganti soluzioni geometriche, ed una analitica; e si vedrà da esse direttamente estesa la soluzione alle ellissi simili, oltre il gran numero di verità nuove ed importanti, alle quali le ricerche stesse hanno condotto, e che arricchiscono sempre più il vasto campo, ed immensurabile della Geometria, e perciò difficile a percorrerlo, senza un corredo di grandi conoscenze, e profondo studio ed esercizio; e quelle potranno utilmente adoperarsi in altre ricerche affini. Finalmente da' tentativi già fatti osiamo promettere ancora del terzo problema una compiuta soluzione. Ed il ripeto, io spero che tante pene che mi ho prese, e mi prendo, e le inquietudini ingiustamente, e da poca onestà prodottemi, saranno felicemente coronate, dal veder una volta terminate le vane, e

sciocche dispute sulla prevalenza de'metodi, e rimessa sul buon cammino presso noi l' istituzion matematica, che da pochi guastamestieri, per coprir loro ignoranza, si cerca depravare.

Nulla ho creduto dover rispondere all' altra insulsa proposizione, che non sia il mezzo da me adoperato conducente allo scopo prefissomi di comparare i metodi, e che da semplici problemi il progresso non si ottenga delle scienze matematiche; poichè di risposta l' una e l' altra cosa non ha bisogno. Ma pure mi piace quì di passaggio accennare, che non in altro modo pensò la R. A. delle Scienze di Parigi, per far terminare la lunga ed accanita quistione sulle leggi della comunicazione del moto; ed i programmi che propose per gli anni 1824 e 1826 contribuirono non poco all' effetto da essa desiderato: e che gli *Atti di Lipsia*, quelli *di Berlino*, le *Transazioni filosofiche*, *cc.*, e le opere de' sommi matematici, che onorarono il XVII° e XVIII° secolo, tra le quali principalmente quelle del Leibnitz, e de' fratelli Bernoulli (*),

---

(*) Gioverà qui notare il principio del *Programma* pubblicato da Giov. Bernoulli in Groninga nel 1697, dirigendolo *acutissimis qui toto orbe florent mathematicis*. » *Cum compertum habeamus, vix quicquam esse quod » magis excitet generosa ingenia, ad moliendum quod conducit augendis » scientiis, quam difficilium pariter, et utilium quaestionum propositionem; » quarum enodatione, tanquam singulari si qua alia via, ad nominis » claritatem perveniant; sibique apud posteritatem aeterna extruant monumen» ta: sic me nihil gratius orbi mathematico facturum speravi, quam si*

sono piene di quistioni proposte nel modo da me fatto; e che essi credettero così contribuire all'avanzamento delle Matematiche; e non s' ingannarono. Sicchè i contraddittori al programma non dovrebbonsi mostrare tanto annojati della mia proposta, alla quale nessuno gl' imponeva obbligo di rispondere, per dimostrarsi incivili; e potevano col loro abbandono far conoscere al pubblico di poco curarla: il quale utile consiglio accetterò ben io per me medesimo, in caso di nuova noja, che si pensasse darmi; giacchè non sono disposto a perdere in inutili polemiche quel tempo, che appena mi resta per adempiere a quanto ho promesso. Ed uniformando il fine di questa mia dichiarazione all' epigrafe che vi messa in principio, conchiuderò, come il Taylor la sua APOLOGIA: *Res ipsas exposui, peroratione non utar, harum enim taedet. Nec si quidquam regesserint contradictores, ulterius respondere necesse habebo. A contumeliis nos semel vindicare, et jus et ratio postulat; ulterius non expedit.*

» *imitando exemplum tantorum virorum* MERSENNI, PASCHALII, FERMATII,
» *praesertim recentis illius anonymi Aenigmatis Florentini* (V. Viviani),
» *aliorumque, qui idem ante me fecerunt, praestantissimis hujus aevi ana-*
» *lystis proponerem aliquod problema,* QUO, QUASI LAPIDE LYDIO, SUAS
» METHODOS EXAMINARE, *vires intendere, et, si quid invenirent, nobiscum*
» *communicare possent; ut quisque suas exinde promeritas laudes a nobis,*
» *publice id profitentibus, consequeretur.*

PROGRAMMA, ec.

Proponere problemata in publicum non caret utilitate, hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset.

Jo. Bernoulli *Act. Erudit. Lips. an. 1739.*

La scienza del matematico non è riposta nella pura e semplice conoscenza delle verità che la costituiscono, ma in quella de' metodi di essa, e nel saperne valutar l' energia, ed a proposito adoperarli. Nella scuola greca uno era il metodo d' inventare, e però questo fu da que' sommi geometri altamente approfondito e coltivato: e quantunque a noi meno attivo ci sembri, che forse per quelli era, non potendolo ravvisare in tutte le sue parti, e nel rapporto che queste avevano [1]; fu però esso nelle loro mani una potentis-

[1] Noi ignoriamo in qual modo essi classificassero i problemi, e ne determinassero la natura, prima d' intraprenderne la soluzione; in qual modo ne eseguissero la riduzione; come ne distinguessero i casi, e le diverse soluzioni, di che abbiamo chiaro argomento di doverne essere istruiti, anche per quelle che corrispondono alle radici or dette *negative*, come in una mia *Memoria*, che di breve presenterò alla R. Accademia delle Scienze, farò rilevare. Assai poco sappiamo del modo come riducessero le loro soluzioni a que' tanti luoghi, che si avevano appositamente preparati, tra' quali il celebratissimo delle tre, quattro, o più rette. Non ci è per-

sima leva per molte scoperte, le quali con grande esattezza condotte a fine, appariscon sempre da straordinaria chiarezza accompagnate; e molte di esse sono pe' moderni come il mezzo da convalidar le loro. La Geometria si mostra in quelle pura e senza velame; e l' animo di chi le considera rimane pienamente soddisfatto e rischiarato (*b*). Da ciò dee ripetersi, che nella scuola greca queste scienze camminassero con progressivo aumento, sebbene con quel passo misurato, ch' era proprio del metodo che adoperavasi, fino ad Apollonio; dopo il quale esse restarono per alcun tempo stazionarie, pel comun fato ch' ebbe ogni dottrina.

Ritornarono dopo secoli ad apparire tra noi italiani, e fino al secolo XVII. coltivossi da' nostri maggiori il metodo stesso degli antichi, sebbene imperfettissimo per essi; e le opere di quelli si andavano grandemente ricercando, e studiavansi, e con molto impegno traducevansi, e le perdute restituivansi; e la Geometria n' ebbe anche nuovi vantaggi, principalmente nella scuola del Galilei (*c*).

Sorta la moderna Analisi, ed applicatasi alla Geometria, i moderni acquistarono sugli antichi la prevalenza per questa parte, di posseder due metodi, da procedere all' invenzione geometrica: e con questo novello metodo più agevole ad apprendersi, più comodo, e più maneggevole, essi compensaronsi abbastanza delle risorse che

---

venuto, nè possiamo ancora indovinare bene cosa fosse quel materiale artificiosissimo de' *Porismi*, tanto utile per essi nella soluzione de' problemi più difficili, del quale ne fu autore Euclide; e ci mancano molte altre opere importanti del loro *Luogo Risoluto*: che però la conoscenza che noi abbiamo del loro metodo non può essere che assai imperfetta; e pur questa è valuta, ed è stata, presso que' moderni coltivatori di esso, un mezzo da tentare le ricerche più ardue in Geometria, e pervenire anche là dove non riesciva l' Analisi moderna (*a*).

loro mancavano dell' antico (*d*). Ma educati anche in questo, ad esso sempre rivolgevansi; e le loro ricerche, sebben fatte con l'Analisi moderna, avevano vero sapor geometrico, e ricevevano dalla Geometria luce e conferma. Per tal modo progredendo la Geometria analitica, non solamente essa avanzavasi di molto, ma l' Analisi benanche. Nè vi sarà chi possa negare, che molte ricerche importanti per la teorica delle equazioni debbano alla Geometria la loro origine, ed il loro perfezionamento. Sommi uomini apparirono a quest' epoca felicissima per le Matematiche, in ogni angolo di Europa, che così conviene indicarli, nel gran numero che se ne ebbero, e tutti di merito distintissimo: e questi non si dipartirono mai dalla conoscenza de' due metodi; che anzi esultavano allor quando, non ostante l' energia dell' Analisi moderna, lor potesse riescire di convalidare col metodo degli antichi qualche ricerca, che a quella puramente appartenesse (*f*). E di ciò molti tratti s' incontrano nelle loro opere, tra le quali, per disegnare le più prossime a noi, citerò solamente quelle del marchese de l' Hopital, de' fratelli Bernoulli, e dell' Eulero. E questo ed il Cramer portarono la moderna Geometria analitica all' apice di sua grandezza, accoppiando sempre la Geometria al metodo analitico, che come istrumento, e non come principale vi adoperavano.

I nuovi metodi sommatorj presero anche, com' è notissimo, dalla Geometria la loro origine; e per convalidarne l' esattezza, convenne dimostrare che ad essa ritornavano; sicchè senza di questa avrebbero mancato della veste di loro genuinità (*g*). La Meccanica stessa, a cominciar dal Newton principalmente, dovè alla Geometria, accoppiata sagacemente all' Analisi moderna, i suoi progressi. Opere classiche si videro venir fuora in ogni genere di ricerche matematiche, sempre accoppiando e facendo andar a paro la Geometria, e

l' Analisi ; ed ogni nazione ebbe così una numerosa scuola di matematici , de' quali continua divenne la sorgente . Finalmente questi medesimi progressi delle Matematiche , ed il ripiegar che incessantemente facevasi verso un metodo , che più agevole rendevasi nell' apprendimento , e nel maneggio , fece poco a poco aberrare dalla Geometria ; ed il metodo delle antiche scuole cominciò a coltivarsi esclusivamente da taluni , non però scompagnandolo dalla conoscenza profonda della moderna Analisi : nel che si distinse principalmente la scuola inglese , seguendo le orme segnate ad essa dall' immortal Newton ; e nel continente quella de' Bernoulli , e l' Italiana . Nessuno certamente ardirà dire , che il Newton , l' Halley , il Cotes , il Moivre , il Taylor , i Bernoulli , i Riccati , il Frisi , e tanti altri sommi matematici , che fin oltre la metà del passato secolo produssero tanto innanzi i metodi della scienza che professavano , ignorassero la moderna Analisi , e fossero stati puri coltivatori del metodo degli antichi , coloro da cui questa riconosceva vantaggi moltissimi . Ma essa ebbe finalmente il suo corifeo nella persona dell' illustre sig. de la Grange , che dopo averla spinta per la parte istrumentale tanto in là , quanto era mai possibile , segnandovi que' limiti , che alcuno non ha potuto dopo lui sormontare ; quasi sdegnando , che in quella parte ove era di ragione secondaria alla Geometria , dovesse necessariamente dipenderne , ed a questa servire , fece tutti gli sforzi per sottrarnela , istituendo una maniera di trattare i problemi geometrici, incastonandone i dati e 'l quesito in formole generali , dalla combinazion delle quali , eliminando anche il bisogno delle figure , dovesse risultarne quell' equazione , che menasse alla risoluzione del problema . Egli stesso però non giunse mai , per gli ardui problemi che con tal metodo ebbe tentati , ad ottener questa desiderata equazione in costruibil forma : ed il suo

gran nome fu ad altri occasione di molti sforzi, e di molta perdita di tempo in riescirvi: ed istituzioni di Geometria analitica similmente compilate si videro dopo ciò comparire [1].

Noi non entriamo per ora a discettare sul merito di questa novella analisi geometrica ridotta ad arte combinatoria, e che sommette la risoluzione de' problemi al metodo delle eliminazioni, il più imperfetto dell' analisi moderna; dal che può talvolta risultare ignoto il grado, e la natura del problema che vuol risolversi, se prima non siavisi in altro modo provveduto, e che il metodo degli antichi, o il Cartesiano abbiano fatto quello riconoscere (*k*). Ma solamente fin da principio col Fergola ci dolevamo, che ciò tornasse a danno di questi due preclari metodi, cui la Geometria e le Matematiche in generale tanto dovevano. E però volendo col fatto convincerne i mo-

---

[1] Il primo esempio, che di questa nuova maniera di trattare i problemi geometrici diede il de la Grange, incontrasi nelle ricerche ch' ei presentò alla R. A. delle Scienze di Berlino *sulla piramide triangolare*, inserito nel volume per l'anno 1773, ove manifestamente afferma, poter queste interessare i geometri tanto pel metodo, che pe' risultamenti, soggiugnendo, che il loro andamento sia puramente analitico, e potersi intendere senza figure: conchiudendo in fine, che indipendentemente dall' utilità diretta che tali soluzioni potranno avere in molti rincontri, serviranno principalmente a mostrare con quanta facilità e successo il metodo algebrico possa essere impiegato in quistioni, che sembrano essere il più dipendenti dalla Geometria propriamente detta, e le meno proprie ad esser trattate col calcolo. Qual fosse però il risultamento di tali ricerche, e quanto valessero rimpetto alle stesse soluzioni proccurate con l'analisi degli antichi, può ognuno rilevarlo, dal confronto di tal memoria del de la Grange, con quella inserita nel vol. I. degli Atti della nostra Accademia delle Scienze (*h*). Posteriormente gli analisti francesi Monge e Lacroix si valsero di que' principj, per compiere in forma scientifica una nuova Geometria analitica, che fu detta, e l'è *a due e tre coordinate*.

derni coltivatori di esso, e mostrar loro la necessità di non deviare interamente da' già conosciuti metodi, ci determinammo a pubblicare alcuni *opuscoli matematici* di nostra scuola, ne' quali tratto tratto inserimmo talune ricerche, da cui i difetti, o la minor perfezione di questa moderna Geometria analitica, si potessero più di leggieri ravvisare. A tal fine ripigliando le tracce già con tanto successo segnate in nostra scuola dal Giordano, pel celebratissimo problema del Cramer anche generalizzato, ne recammo le diverse soluzioni comparandole tra loro; altra elegantissima ne aggiugnemmo del nostro collega Scorza, e molte ricerche affini pur trattammo in breve, che della considerazione dell' Eulero, e de' suoi distintissimi allievi Fuss e Lexell erano state degne; ed una delle principali Accademie di Europa, si aveva recato a sommo pregio d' inserirle ne' suoi *Atti*. E dopo tutto ciò così conchiudevamo: *Preghiamo i coltivatori della Geometria analitica a due e tre coordinate, di voler risolvere e costruire giusta i loro metodi, e per nostro gradimento i problemi generali di quelle mirabili iscrizioni, e di altre ricerche affini*. Nè però dal lungo periodo corso di ventotto anni queste nostre preghiere sono state anche in minima parte esaudite (*l*).

Più innanzi il Fergola, a nostra spinta, s' indusse a farci pubblicare le soluzioni de' problemi *de Inclinationibus* universalizzati, il quale argomento costituiva un anello della seconda parte della sua *Arte d'Inventare*, di cui già fin dal 1809 avevamo pubblicato il prospetto: e nell' introduzione ad esse, che come prove di fatto proponevamo, per porre al confronto l' efficacia de' metodi geometrico, e geometrico-analitici, più di un' opportuna riflessione facevamo al proposito, sulla insufficienza per molti riguardi della modernissima Geometria *a due e tre coordinate* (*m*).

Rimasti infruttuosi questi tentativi, quel sommo uomo, mirando più da vicino la cosa, volle istituire un parallelo di fatto tra i mezzi della modernissima Geometria analitica e 'l metodo Cartesiano, col confronto delle istituzioni di Geometria sublime trattate nell' uno e nell' altro modo; e quindi nel 1814 ci permise di pubblicare il suo *Trattato analitico* delle *Sezioni coniche*, e de' *luoghi geometrici* per esse, opera elaboratissima, compiuta nel suo genere, e piena di ricerche nuove, difficili ed importanti; e dalla quale grandissimo vantaggio ritrarranno coloro, che per la buona strada cercheranno avviarsi all' invenzione geometrica col metodo analitico de' moderni. In essa passo a passo, e nella prefazione, ed in note, e negli scolj vien dimostrato ove difetti il novissimo metodo a *due coordinate* [3]. Ma quest' opera sebbene scritta con in-

---

[3] Volendo qui notare alcuni solamente di tali luoghi, che ci son caduti sottocchio, percorrendo una tale opera, indicheremo nella *pref.* il §. 3., ove l' autore una per una enumera le mancanze, che ravvisansi nelle modernissime istituzioni analitiche sulle curve coniche, nè dopo ciò possiam dire che finora siesi, da' compilatori posteriori di esse, ciò corretto; ed il §. 4. ove egli adombra il nuovo metodo analitico; e la seconda noterella alla pag. 5, Inoltre la nota a pag. 28, ove la conchiusione sembra riguardare un problema difficile risoluto col metodo a due coordinate, da un distinto professore napoletano educato in nostra scuola (*n*); e l' altra a pag. 41, nella quale di proposito compara gli effetti de' due metodi geometrico-analitici, facendo rilevare la grandissima efficacia e chiarezza del Cartesiano sul proposito. Altro difetto in cui suole inciamparsi da' coltivatori del modernissimo metodo geometrico-analitico fa osservare nella nota a pag. 45. E sono pure da considerarsi le note a pag. 101, 138. Ma senza andar un per uno enunciando tali luoghi; tutto questo trattato del Fergola serve egregiamente all' oggetto, ch' egli si aveva prefisso di dimostrare, cioè, quanta prevalenza abbia il metodo geometrico-analitico sul puro analitico de' moderniori. Nè aveva pur mancato di

dicibile facilità e chiarezza, riesciva ancor troppo laboriosa, per la varietà delle ricerche tutte importanti che vi si contengono, a coloro che al presente amano di diventar presto risolvitori di problemi, già in più modi e con eleganza risoluti, contentandosi che le loro soluzioni risultino comunque, purchè possano dichiararsi autori di un opuscolo, ed anche di un libro, ed imporne al volgo; e però dobbiam credere, che costoro alcuna pena non abbiansi mai data di approfondirla, e forse che non l' abbiano nè men guardata, o che non ne conoscano l' esistenza, come per tutte le opere classiche di nostra scienza di presente avviene, le quali in breve tempo sono pur divenute viete, e condannate ad essere ornamento di libreria, ed a figurare al più nelle storie che di quella si scrivono (*p*).

Non potendo dunque riescire a convincer costoro direttamente, discorrendola con essi sul valore e sull' estensione de' metodi; poichè ciò supporrebbe la conoscenza di questi, e ci trarrebbe di quistione; non dal modo tenuto per lo passato, più innanzi indicato, e che era un mezzo di fatto: e vedendo di giorno in giorno andar presso noi le matematiche declinando, mentre vantansi da taluni ibridi progressi; abbiam preso l' espediente di rinnovellare l' antico sistema, che ne' due passati secoli fu di valevolissimo sprone a far grandemente progredir le matematiche, cioè quello di dimandare a' nostri matematici le soluzioni di due problemi, e rinuovar loro la dimanda di altra volta [4], proponendo a chi vi adempisse, con le condizioni che verranno assegnate, il premio di una medaglia di oro

---

fare qualche avvertimento sul proposito, a vantaggio della Geometria antica nelle note a' §§. 40, 51 del lib. I. delle sue *Sezioni Coniche sintetiche* (*o*).

[4] Di questo stesso espediente si era prevalso il Viviani a' suoi tempi, per coloro che, troppo cultori del nuovo metodo Cartesiano, disprezzavano l' antica ana-

di ducati sessanta per ogni quistione, non a titolo di compenso, che nè pari alla nobiltà della scienza, e de' coltivatori di essa, nè al servigio importante che a questa si rende, si potrebbe da noi dare; ma semplicemente per offrire un contrassegno pubblico e permanente al merito di tanta operazione (*q*).

I soggetti che proponiamo a' nostri colleghi matematici napoletani, ed a' valorosi giovani che battono ora questa nobilissima carriera, sono notati nelle due seguenti pagine.

---

lisi, proponendo, *singulis litterario in Orbe degentibus hodie praeclarissimis analystis*, il celebre e n i g m a g e o m e t r i c o, *ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: Oh! unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mente infusa, ut haec inperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, aeterna ista, quae semper et unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.*

I.

» Esibire la corrispondente convenevole costruzione geometri-
» ca della soluzione analitica data dal de la Grange del problema di :
» *Iscrivere in un data cerchio un triangolo i cui lati passino per*
» *tre punti dati*, non dipartendosi affatto da que' medesimi princi-
» pj da quel sommo analista stabiliti, per pervenire all' equazione
» finale del medesimo ; e compierne poi, con gli stessi principj, la
» dimostrazione analitica (*r*).

Se di un tale argomento occupossi nulla meno che lo stesso Eulero, il quale dubitò forte della possibilità di una costruzione elegante della soluzione analitica del Lagrange ; e se il suo discepolo Lexell, dopo molti e lunghi giri di analisi non potè giugnere a compierla ; sarà certamente degno di gran lode quel nostro matematico, che ritentando un tale argomento, valesse a perfezionarlo nel modo da noi dimandato.

Il vantaggio che ritrarremo dalla buona riescita di questo lavoro, sarà di compiere interamente tutto quello che riguarda un problema famoso, che in nostra scuola è stato in più modi ripetute volte trattato, reso generale, ed esteso ad altre ricerche affini ; e del quale non si ha per anco alcuna adequata analitica soluzione.

II.

Problema.

Iscrivere in un triangolo dato di specie di grandezza tre cerchi, i quali si tocchino tra loro, e tocchino i lati del triangolo.

Un caso semplicissimo di questo problema, quando, cioè, il triangolo dato fosse isoscele, formava parte del problema detto *trigemello* da Giacomo Bernoulli, che ne diede una soluzione analitica nel lemma II. della sua dissertazione, ove imprese a risolvere un tal problema trigemello, proposto per pubblico affisso nelle piazze di Amsterdam, mentre egli colà dimorava (*s*).

Ed appunto nel nostro problema generale, dopo essersene per incidenza occupato un distinto matematico italiano, si sono impegnati più dotti professori italiani, francesi, e tedeschi; ed ultimamente una delle maggiori accademie di Europa l' ha pure accolto ne' suoi Atti; sicchè non v' ha dubbio, che sia opera di molto merito il tentare di più elegantemente risolverlo.

La soluzione che ne dimandiamo potrà o esser fatta col metodo degli antichi, distendendone anche la corrispondente composizione geometrica, o pure con l' analisi Cartesiana; o finalmente col modernissimo metodo a due coordinate; dirigendo noi specialmente a' nostri sagaci cultori di esso questa ricerca, per saggiar la forza e l' estensione di un tal metodo. In questi due secondi casi però dovrà darsene la conveniente costruzione e dimostrazione, non dipartendosi da que' principj, che hanno servito all' analisi, e derivandole dalle formole stesse di questa (*s'*).

Un tal problema servirà di convenevole supplemento a' pro-

blemi delle *Tazioni*, egregiamente risoluti dall' insigne nostro socio Fergola, pubblicati fin dal 1809, ed in seguito consegnati nel vol. I. degli Atti della nostra R. A. delle Scienze (*t*).

III.

PROBLEMA.

Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide.

Un tal problema, non mai proposto, e tentato da altri, per quant' è a nostra notizia, potrà anche venir risoluto col metodo degli antichi, con l' analisi Cartesiana, o con quella a tre coordinate (*u*).

La soluzione di esso compirebbe ad un tratto le due Memorie del prof. Flauti, l' una *de' Contatti sferici*, e l' altra della *Piramide triangolare*, inserite nel vol. I. degli Atti della stessa R. A.

MODO DI PRESENTARE LE MEMORIE, E DI GIUDICARNE.

Sono assegnati per rispondere a' quesiti proposti tre mesi, a contare dal primo del maggio prossimo: che però, per tutto il dì ultimo di luglio seguente, i concorrenti al premio dovranno far pervenire in mano del segretario perpetuo della R. A. delle scienze, cav. Monticelli, le loro Memorie, distinte da un semplice motto, e senza segnarvi affatto il loro nome, che noteranno in una scheda ben suggellata, sulla quale verrà scritto lo stesso motto [5].

Nella prima tornata del venturo mese di agosto il segretario perpetuo presenterà le Memorie inviategli, chiuse come sono, al presidente dell' Accademia, il quale apertele in presenza di questa, le firmerà, pagina a pagina, insieme col segretario perpetuo, e co' tre seniori; ed indi saranno mandate alla classe matematica pel corrispondente esame, che dovrà terminarlo nello spazio di due mesi; sicchè possa renderne conto all'Accademia nella prima tornata del novembre venturo. Il segretario della classe leggerà ad essa ciascuno scritto, e potrà anche ogni socio della medesima dimandarlo, per considerarlo particolarmente; e della discussione, che avrà avuto luogo, se ne perderà notizia nel *processo verbale* corrispondente. Il parere dovrà da ciascuno esser dato per iscritto: raccolti i pareri dal segretario della classe, questa si riunirà di nuovo, per leggerli e discuterli in comune, e stabilire il risultamento di essi come il voto della classe, che verrà registrato, per rilevarsene poi alla fine, nel caso che siensi avute più soluzioni di una stessa delle quistioni pro-

[5] La R. A. delle Scienze di Napoli si è compiaciuta di gentilmente accogliere la preghiera del proponente le quistioni, ed i premj, di far ricevere dal suo segretario perpetuo le risposte, e farne giudicare del merito dalla sua classe matematica.

poste, quella che si stimerà la più elegante, alla quale verrà aggiudicato il premio, e pubblicata nel volume degli Atti dell'Accademia, se questa lo troverà conveniente, o pure stampata separatamente. Lo stesso per quella, o quelle, che saranno state credute degne dell' *Accessit*.

Le Memorie non approvate, dopo essersi bruciate le schede che l'accompagneranno, in presenza dell'Accademia, rimarranno depositate nell'archivio di essa.

NOTE AGGIUNTE AL PROGRAMMA

NELLA PRESENTE RISTAMPA.

(*a*) Tra le altre perdite, che i giusti apprezzatori del loro metodo deplorano, bisogna notare tutto quel materiale da essi preparato, per la composizione de' problemi *ipersolidi*, *o lineari*, riguardante le superficie curve, e le linee in esse segnate; del che, in più luoghi delle sue *Collezioni*, offre sicuro argomento *Pappo*, tra' quali è degno di esser qui recato il seguente, dopo la prop. XXX del lib. IV.: *Antiqui geometrae datum angulum rectilineum tripartito secare volentes, ob hanc causam haesitarunt. Problematum, quae in Geometria considerantur, tria esse genera dicimus, et eorum alia quidem* plana, *alia* solida, *alia vero* linearia *appellari. Quae igitur per rectas lineas et circuli circumferentiam solvi possunt, merito dicuntur* plana, *lineae enim per quas talia problemata inveniuntur in plano ortum habent. Quaecunque vero solvuntur, assumpta in constructionem aliqua coni sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt, quoniam ad constructionem solidarum figurarum superficiebus videlicet conicis uti necessarium est. Relinquitur tertium genus problematum, quod* lineare *appellatur, lineae nam aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae va*rium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. *Ejusmodi vero sunt etiam* lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur, et aliae quaedam magis variae, et multae a *Demetrio Alexandrino* εν ταις γραμμικαις επιςασεσι, *hoc est in linearibus aggressionibus, et a Philone Tyaneo ex implicatione* πληκτοειδων, *et aliarum varii generis superficierum inventae, quae multa et admirabilia simptomota continent; et nonnullae ipsarum a junioribus dignae existimatae sunt de quibus longus sermo haberetur. Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur.* . . . . . .
Al che potrebbesi aggiugnere tutto quello, che, relativamente allo stesso argomento, come estesamente trattato dagli antichi, ha lasciato notato Proclo, in più luoghi del suo importante comentario.

Note aggiunte.

Or io credei superfluo, nel pubblicare il programma, di riandar tutte queste cose, delle quali già mi trovava aver fatto altra volta menzione, nella prefazione alla *Geometria di Sito*, ed in diversi luoghi di essa; poichè non credeva, che il programma dovesse diventare un trattato elementare dimostrativo di ogni cosa, che vi si asserisce, nè poteva supporre, che esercitati professori tali cose assolutamente ignorassero: nel che essendo stato avvertito in contrario dalla *risposta* fatta ad esso, ove agli antichi geometri, non che non aver mai avuto metodo d' inventare, ogni conoscenza in quel genere di ricerche si è audacemente tolta, mi sono creduto nell' obbligo di brevemente ripeterne qualche cosa, alla quale aggiugnerò per conferma, ciò che dice il celebre Cramer, nella prefazione alla sua elaboratissima opera *Introduction a l'Analyse des lignes courbes algébriques*, alla cui mente dichiaro di uniformarmi, tanto più che la costui autorità, non mi sarà al certo tacciata di soverchia addizione alla Geometria antica · » Aussi (ecco com' ei dice) les courbes ont elles toujours fait un des principaux » objets des speculations des géométres. A peine la Géométrie sortoit elle de l' en» fance, qu' elle s' occupa des *Sections coniques*: bientôt après elle admira les » propriétés de la *Concoide*, de la *Cissoide*, des *Spirales* (courbes tres différents » de celles que nous designons par ce nom, et qui sont les *Hélices des anciens*) *et* » *de plusieurs autres lignes, dont le nom et la connoissance a péri* avec la plûpart des » monuments de l'ancienne Géométrie «. E tralasciando la continuazione di questo ragionamento, ove il celebre autore esattamente espone il merito dell'Analisi algebrica, noteremo ad istruzione la conseguenza che ne trae: »Il y a donc, ce semble » de l'humeur, et une sorte de caprice, à mepriser une méthode si utile, et à faire » gloire de n'employer que l' Analyse géométrique des anciens. *Celle-ci, je l'avoue* « *a sur l' Algébre le mérite d' une evidence plus sensible*, *et d' une certaine élégance* » *qui plait infiniment*; mais il s' en faut beaucoup qu' elle soit aussi commode, et » aussi universelle. *Donnez lui donc, si vous voulez, la préference*; *mais ne donnez* » *point d' exclusion a l' autre methode.* Les vérités mathématiques ne sont pas si fa» ciles à trouver, qu' on doive chercher du mérite à se fermer quelcune des rou» tes qui peuvent y conduire «. Ecco come ragionava un gran geometra ed analista; e lo stesso ragionevolissimo consiglio, ch' egli in ultimo luogo dà, aveva già espresso il de Tschirnausen, introducendosi alla sua Memoria *de dimensione curvarum*, inserita negli Atti di Lipsia pel 1695, dicendo; *Cum variae in Mathesi dentur viae*, *ad easdem veritates inveniendas ducentes*, *plurimum in*

eo ponendum est studii, simplicissima ut investigetur. E così hanno sempre pensato, e detto tutt' i sommi matematici: che forse la scienza si fosse ora cambiata, per opera de' contraddittori al programma?

E poichè la circostanza presente me ne porge opportuna l'occasione, non voglio tralasciare di render pubblica testimonianza di rispetto al già fu ottimo professor Brunacci, il quale in una sua lettera da Milano, in data del 9 febbrajo 1817 così scrivevami: » Nella mia lettera, nella quale la ringraziava della di lei bel» la opera *Geometria di Sito ec.*, che gentilmente mi aveva voluto mandare in re» galo, le prometteva di scriverle un'altra volta dopo averla letta, Eccomi a com» piere la promessa, Io ho con gran piacere gustata l'opera sua, e particolarmente » le cose sulle *plectoidi*. Oh come noi andavamo lungi dal vero, credendo nuova » interamente la dottrina di quelle curve generate dal moto di una retta nelle spazio! Convengo con lei, che *troppo i moderni hanno abbandonate le vie battute da» gli antichi*, *e che utilissimo sarebbe a quelle di nuovo avvicinarsi*. Ella segua la » sua luminosa carriera ad onore della nostra Italia . . . . . . Che direbbe ora se vivesse, in sentir profferire tante sciocchezze nella *risposta al programma*, che non par mai vero, che tante se ne avessero potuto ammassare? E lo stesso sentimento del Brunacci, che ho qui preferito, perchè comunemente giudicato più degli altri matematici italiani de' suoi bei tempi dedito all' Analisi algebrica, di che non disconvengono gli stessi contraddittori al programma, mi hanno, in divers' incontri manifestato tutti gli altri illustri matematici italiani suoi contemporanei, che tralascio nominare, per non essere infinito. Raccogliendo dunque ciò che qui ho sparsamente accennato, conchiuderò, non aver mancato gli antichi di estesissima conoscenza sulle linee curve in generale, e sulle superficie curve; ma bensì aver mancato della facilità in classificarle, esprimendone la natura per la corrispondente equazione, dalla quale i principali sintomi di esse più agevolmente deduconsi; il che forma gran vantaggio pel metodo algebrico. Al contrario però averci essi sopravanzato nell' assegnare delle curve che consideravano tutte le proprietà geometriche, ed in adoperarle nella costruzione de' problemi ipersolidi; al che noi non siamo per anco pervenuti. Donde sempre più si dimostrerà ragionevole la conchiusione poc' anzi recata del Cramer, che ripeterò in senso inverso, dicendo: *Coltivate quanto volete i metodi algebrici, essi sono universali e comodi, e più facilmente apprendonsi e si adoprano; che però per mezzo di essi si è aperta la porta del-*

l'invenzione a parecchi spiriti, pe' quali sarebbe restata sempre chiusa senza questo soccorso. Ma non trascurate di coltivare il metodo antico, nelle cose geometriche, e di leggere e meditare le opere profonde de' greci maestri, dalle quali si raccoglie infinita scienza, da comprovare, rischiarare, e promuovere vie più la Geometria col metodo moderno.

(*b*) Credei che di questa mia proposizione non vi sarebbe stato alcuno, per poco usato che fosse nelle ricerche geometriche, con l'un metodo, o con l'altro, che non convenisse pienamente: ma poichè i contraddittori al programma nè men no sono persuasi, il che per altro fa grande sorpresa, ho scelto a sgannarli, tra le tante autorità che potrei loro addurre (delle quali già quella del Cramer trovasi per incidenza riportata nella precedente nota), due luoghi di moderni analisti. Nel primo de' quali, ch'è dell'illustre Carnot, con profondità e penetrazione ne' due metodi, costui così ragiona: » La multiplicité des succés de » l'analyse, l'accord constant de ses résultats avec ceux qu'on pouvoit obtenir par » la synthése, *et le sceau de l'évidence apposé successivement par celle-ci à toutes » les découvertes de la première*, ont mis hors de doute la certitude de ces procé- » dés. Mais lors des premiers essais de cette méthode d'invention, on dut être fort » circonspect, et l'on n'osa mettre au jour les decouvertes operées par son mo- » yen, qu'apres les avoir fait passer par l'épreuve de la synthése . . . . . » On est devenu plus hardi a force de succés; et les résultats de l'analyse inspi- » rent aujourd'hui la même confiance que ceux de la plus rigoureuse synthése » (*Geom. de Position* §.14.) «. E di tutto questo, ch'è qui giudiziosamente det- » to dal Carnot, non vi sarà buono istitutore in Matematiche il quale non ne sia convinto, e che non vegga però la necessità di far progredire a passo eguale il giovine, che si avvia nelle ricerche geometriche sì con l'un metodo che con l'altro: d'onde ancora, per la buona e perfetta istituzione, fa bisogno, come il dissi altra volta, nella mia *Dissertazione sul metodo in Matematiche, ec.,* di far precedere, o al meno accoppiare l'insegnamento delle *Sezioni Coniche* esposte in forma geometrica, alle stesse trattate con l'analisi moderna. Su di che ancora que' contraddittori hanno trovato a ridire; e noi volentieri condoneremo ciò alla poca sperienza nell'insegnamento, di colui che ha dato il nome alla *Risposta.*

L'altra delle autorità è presa dal Lhuilier, il quale al proposito della soluzione generale da lui recata al problema del Cramer, così esprimesi: » Je » suis éloigné de vouloir mettre en parallèle avec *la marche lumineuse des anciens*

» *le procédé suivant purement algébrique.* Je sens trop(et je le sens avec satisfa-
» ction) combien la Géométrie l' emporte dans ce cas sur l' Algébre. Je saisis au
» contraire (avec l'auteur) cette occasion *d'engager les jeunes mathématiciens à ne
» pas se livrer exclusivement aux méthodes de calcul* ; *mais à cultiver, au moins
» dans leurs premières études, les méthodes anciennes avec plus de soin, que ne l'on
» fait le plus grand nombre des calculateurs modernes* « . Dal qual luogo ben si ri-
leva , che non siamo noi soli ad inculcare , che non debbasi tralasciare di col-
tivare con molto studio il metodo degli antichi, da coloro , che da' metodi analiti-
ci moderni voglion trarre vantaggio .

Ad esso aggiugneremo ancora uno squarcio di altra lettera direttaci dal Bru-
nacci , al proposito di avergli inviato il primo fascicolo degli *Opuscoli Matematici* ;
il che servirà anche ad assicurare , che questa parte di essi , che comprendeva i
primi tre opuscoli , era già conosciuta fin dal 1810 , ch' è l'epoca della data di
tal lettera , ove dicesi : » A lei rendo vivissime grazie dell' avermi mandato in
» dono quel primo quinterno di *opuscoli matematici*. — Ella dice pur bene , che
» trascurando la sintesi, i geometri si tarpano una delle due ali che hanno per sa-
» lir sublime . A me è sempre piaciuta , e duolmi di essermi troppo lascia-
» to trasportar dalla corrente . In questo nostro regno però si è cominciato a
» rimettere in pregio la Geometria di Euclide , per l' educazione de' giovanetti .
» . . . .

(*c*) Nella scuola del Galilei compironsi le fondamenta de' metodi sommatorj
moderni , promovendo la Geometria ; e così preparavasi a gradi quel grande
edifizio , che ne' metodi , e nella scienza della Natura dovevasi da' geometri po-
steriori , e col decorrere di più di un secolo , elevare . Il Newton fu ancor
egli istituito nell' antica Geometria , ed apprezzatore grandissimo de' metodi di
questa ; e però da esso potè darsi l' ultimo passo pel perfezionamento de' me-
todi sommatorj , e della Fisica sperimentale . Chi conosce la storia delle Ma-
tematiche , e sa contemplare i progressi dello spirito umano in esse , e la ge-
nesi delle scoperte fattevi , non dimanderà certamente perchè Galilei non fu
Cartesio , e questi non fu Newton , conoscendo appieno , che vi bisogna una ge-
nesi successiva da un punto di tali scienze , nelle quali il caso non ha alcuna
parte , ad un altro ; e questa è l' opera del tempo , e non di un solo uomo . Ma
coloro che avevan detto, che gli antichi potettero produrre tante sublimi verità
geometriche senza alcun metodo, ed a caso pervenendovi , potevano ancor soggiu-

gnere, che se nella scuola del Galilei si fosse coltivata esclusivamente l'analisi moderna, ed abbandonata la Geometria, si sarebbe di slancio pervenuto a rapire all' immortal Newton il merito, di essere lo scopritore delle vere leggi dell'Universo: e bisogna anche supporre senza aver conosciuta e stabilita quella dell'attrazione universale, che sicuramente non fu opera del calcolo numerico. Ma la scuola del Galilei sarà sempre contenta di aver promossa la Geometria, la Meccanica, e la scienza idraulica, e di aver lasciate opere, che il volger de' secoli non ha fatto, nè farà dimenticare; del pari che gli autori di esse.

(*d*) Da questo luogo, e da altri del nostro programma, non pare che risulti la conseguenza, ch'è piaciuta trarne a' visionarj contraddittori di esso, che nel medesimo si volesse persuadere, che abbandonata l' Analisi moderna, si dovesse assolutamente coltivare l' antica. Ciò che si è sempre raccomandato in nostra scuola, e la maniera come vi si sono educati gli allievi in Matematiche, con loro grandissimo profitto, e della scienza, del che sono un esempio i contradittori medesimi, è stata quella di accoppiar sempre la conoscenza dell' un metodo all' altro, valendosi all' uopo de' mezzi, che ciascuno poteva all' opportunità offrire; e tra gli altri argomenti di questa natura in essa dati, potremo citar, come pubblico e permanente, quello degli *Opuscoli*, e comprovarlo con tanti lavori geometrico-analitici, o assolutamente di pura analisi pubblicati in ogni tempo dal Fergola, e da' suoi discepoli, che hanno ad essi meritata la pubblica stima. E lo stesso Giordano, mentre dava del problema del Cramer generalizzato una soluzione, la quale, a giudizio del Lhuilier, *uguagliava almeno in eleganza tutto quello, ch' egli conosceva dell' analisi geometrica degli antichi*; ch' è quanto di più lusinghevole poteva dirsi per un giovinetto della sua età, non tralasciava, con estrema modestia, figlia di vero merito, e necessaria in chi vuol cominciare con profitto una carriera difficile, di confessare ingenuamente gli sforzi inutili da lui fatti, per risolvere il problema in modo puramente algebrico, e soggiugneva: » Sarebbe veramente cosa desiderabile, che » qualche perspicace algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione pu» ramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la » cedesse alla sintetica già rapportata. » Ed il Lhuillier, riportando questo luogo del Giordano, così conchiudeva: *Regardant avec raison la comparaison des méthodes comme un objet, qui doit principalement fixer l'attention des mathématiciens*. E ciò valga a manifestare quanta pur fosse l'imperizia di coloro, che anche in tal

proposito hanno osato attaccare il programma come superfluo , e da rigettarsi.

(*f*) Ciò conferma il già detto dal Carnot nella nota *b* , e la poco fa recata conchiusione del Lhuilier.

(*g*) Il d' Alembert , gran promotore dell' Analisi moderna , volendo confermare le fondamenta di quella degli infiniti , si sforza provare , che questo metodo sia a dirittura uniforme e dirivato da quello de' *limiti* , del principe de' geometri Archimede ; ed il Leibnitz l' aveva già preceduto in definire Archimede per *vir stupendae sagacitatis , qui fundamenta posuit inventionum fere omnium, in quibus promovendis aetas nostra gloriatur.* E ciò serva di conferma all' onesta proposizione, che gli antichi non possedevano affatto metodi d' inventare.

(*h*) Nessuno certamente, che conosca la Geometria da una parte, e che sappia ancor valutare i grandi benefizj prodotti all' analisi moderna dal sommo de la Grange , ci attribuirà a bestemmia imperdonabile quella di aver detto , che costui , principe degli analisi , non lo fosse egualmente de' geometri .

(*k*) Di ciò convengono gli stessi buoni , e non capricciosi promotori di un tal metodo ; e lo dimostrano abbastanza i tentativi da essi fatti in promuoverlo . Al che comprovare , recherò qui de' tanti luoghi del Gergonne , che reputo essere stato il promotore più valente del metodo *a due coordinate* , la seguente conchiusione di sua risposta al Poncelet , inserita negli Annali vol. VIII. » De mon » côté (così egli dice) je ne négligerai aucune des occasions que , mes courts » loisirs pourront m' offrir , pour multiplier les exemples du genre d' application » de l' analyse à la géométrie, *que je cherche à faire prévaloir;* et j' ose croire , que » la diversité de nos méthodes ne faira jamais naître d' autre rivalité entre nous , » que celle du zéle pour l' avancement de la science . . . . . . je m' empresse de » declarer , que sans oser affirmer que *la géométrie analytique puisse parvenir » jusque là , il me parait au moins tres douteux qu' elle puisse y atteindre d' une » maniere facile* . E nella soluzione , che a forze riunite egli ed i suoi colleghi compilatori degli *Annali* , dopo molti stenti , riescirono a dare del problema *de' tre cerchi da iscriversi nel triangolo* , furono obbligati a confessare il loro metodo inabile a fargli pur riconoscere per molto tempo la natura del problema ; e finalmente di non aver potuto pervenire che appena ad una soluzione aritmetica di esso . E gioverà pur notare qui di passaggio (giacchè questo argomento dovremo di proposito trattarlo nel parallelo de' metodi , che abbiamo più volte accennato), che il Puissant , nel suo *Recueil des propositions de Géo-*

métrie, tutte le volte che s' imbatte in equazioni a' problemi che risolve assai semplici, da poter condurre ad un agevole costruzione, non tralascia di eseguirla, dimostrando così apprezzare il merito delle ricerche geometriche; mentre poi se quelle si presentano in forma complicata, si contenta di considerarle come numeriche; il che è manifestamente incompatibile con la mente di tutt' i geometri, e con la natura di que' problemi. Lo stesso per altri espositori del moderno metodo analitico puro. Nè dee pur tacersi, che quante volte essi possono esibir facilmente una geometrica dimostrazione di qualche verità, non tralasciano di farlo. E ciò prova che altrove si ha buon senso, e non capricci.

(l) Se ancor fosse vero, del che par che ci si faccia rimprovero, che non pur presso noi, ma eziandio al di fuori non si fosse dato ascolto alle nostre preghiere, non però dovremmo displacerci di nostra ragionevole dimanda: poichè già prima si è accennato, quanto fosse stata ben accetta a' sommi matematici la soluzione del Giordano, e dovremo ritornarvi nelle *Considerazioni ec.* E quindi possiamo con sicurezza conchiudere, che in pregio abbiasi pur dovuto poi avere quella generale dello Scorza, e le altre ricerche intorno a tal problema, da me e dal Giannattasio aggiunte negli *Opuscoli*, affini a quelle trattate dall' Eulero, e con maggior estensione dal Lhuilier (Vegg. la parte II. delle *Considerazioni, ec.*) il quale dovè essere ben contento in vedere come la Geometria antica, si fosse finalmente ben impossessata di un problema, ch' egli aveva tanto desiderato, e nel medesimo tempo diffidato, che geometricamente si risolvesse. » Quelqu' attaché que je suis à la Géométrie des anciens (ecco com' egli esprimevasi) quelque regret que j' aye de la voir trop négligée; je n'osai, je dois l'avouer, former » des espérences sur son application à ce problème pris dans cette généralité..... » Et je formo des désirs bien plus que des espérences sur une solution géométrique «. Ma pure osservisi, che noi pubblicavamo gli *Opuscoli* suddetti nel 1811, e già tempo prima, ne avevamo sparso il primo fascicolo (*Vedi nota b*); che però, trovando da quell' epoca ripetutamente trattato un tal problema, e le ricerche affini ne' distinti *annali delle Matematiche*, da diversi geometri ed analisti, e con diverso metodo, ci si potrebbe permettere il sospetto, che avessimo a ciò pur noi data una qualche spinta con quella proposta, la quale, se presso noi riesci inefficace a produrre col metodo analitico puro una nuova soluzione del problema particolare, lo fu almeno a farne conoscere riprodotta quella del Gergonne per lo stesso problema, il che non rimase senza profitto, e per nostra opera,

a colui che si compiacque di rendere a' matematici napoletani sì importante servigio.

(*m*) Si riscontrino su tal proposito i tre opuscoli segnati co' n. IX. X. XI, nella raccolta più volte indicata.

(*n*) Veggasi la conchiusione della nota *l*.

(*o*) I contradditteri al programma si sono limitati a dire, che le ricerche dal Fergola notate come omesse nelle ordinarie istituzioni di *Analisi a due coordinate*, eran comprese nell' equazion generale alle curve coniche, e però non essere un difetto il trascurarle: e così pure altra volta fecero pubblicare, che ogni problema geometrico algebricamente risoluto doveva essere costruibile; poichè nella sua equazione era compresa la natura di esso, e quindi quanto per la costruzione bisognava. E noi non gli negheremo l'una e l'altra proposizione; ma gli soggiugneremo solamente, esser tali cose vere, come per l'appunto comprendevasi nel caos l'attuale Universo, pria che il sommo Iddio gli dasse separazione, forma, ed ordine. Noi non contendiamo di possibilità, ma di fatto, e non pur di fatto solamente, ma di facilità maggiore o minore ad ottener quelle verità dall' equazion generale: ed i contraddittori in parole, non so perchè non abbiano, ad esercizio di alcun loro allievo, fatte ricavare quelle facili conseguenze dall' equazion generale. Al che aggigneremo, che in libri elementari non convenga tralasciar verità e problemi importanti, sul semplice riflesso di esser facili a rilevarsi: chè allora ben si potrebbe tutto tralasciare, limitando l' istituzione de' giovani a far loro conoscere quella semplice equazione generale.

(*p*) Di ciò ne presenta un chiaro argomento la risposta tutta de' contraddittori al programma.

(*q*) E qui si avverta non aver io mai detto, offrire un sì tenue premio per compenso a chi risolvesse le quistioni proposte; che ben mi sarei guardato dal profferire simile indecenza, della quale mi hanno voluto anche far regalo i contraddittori al programma.

(*r*) Sebbene mi sia proposto di non entrare affatto in esame del merito delle risposte stampate a' quesiti del programma, lasciando un tal giudizio al pubblico saggio ed imparziale; pure non posso fare a meno di accennare qui generalmente alcuna poca cosa su tale assunto. E per riguardo alla prima quistione, nella *risposta al programma*, non si è data la costruzione, nel modo dimandato; ma si è prolungata l' analisi fino a tramutare l' equazione del de la Grange, pro-

pria solamente pel cerchio, a quella che costruiscesi dal Gergonne, da potersi anche alle curve coniche estendere, nella quale i risponditori trasformano l'altra; e ciò è cosa ben facile ad ottenersi da qualunque scolarello, quando si abbiano presenti le due equazioni, cioè il luogo di partenza e quello dell'arrivo, potendo solo variarsi nel modo più o meno breve, come meglio a ciascuno può riescire. Ma non era questo ciò che chiedevasi nel programma, e che formò la difficoltà grandissima, per quella costruzione, dell'Eulero, de' suoi discepoli, dello stesso de la Grange, e di tanti altri sommi matematici, che vi si provarono. Nè tampoco si osserva nella risposta vestigio della dimandata dimostrazione: nè vale il dire ch'essa sia inutile; poichè l'era dimandata, bisognava adempiervi. Sarebbero state più ragionevolmente inutili le dimostrazioni de' problemi risoluti dagli antichi, con un'analisi breve e chiara, e senza ripieghi che ne disturbino l'andamento; e pure essi credettero necessario il compierne la composizione, recandone dopo la costruzione la dimostrazione: che *costruzione e composizione* sono cose ben diverse tra loro, essendo quella una parte di questa; che però erroneamente si è detto da essi alla pag. 6. della loro *Risposta*: *costruzione del problema, o sia composizione*.

L'essersi pur detto, che l'equazione del de la Grange fosse propria al calcolo numerico, l'è una sfuggita tutta nuova, degna di chi non sa distinguere tra costruzione, e valore; tra Geometria ed Aritmetica.

(*s*) Ecco un altro argomento per provare, che i grandi uomini ricevevano di buon grado le proposte di problemi, e se ne occupavano senza offendersene, e rispondere con ingiurie.

(*s'*) Per coloro che non saranno abbastanza pratici nelle metamorfosi algebriche, nelle quali non può negarsi un merito singolare a' risponditori al programma, avvertiremo, non esservi nulla di nuovo nell'analisi presentata per tal problema, essendo la medesima che quella de' due distinti professori di Berlino Crelle e Lechmütz, come potrà ben rilevarsi, allorchè, con questa prevenzione, si riscontri la costoro soluzione, che daremo nella parte III. delle seguenti *Considerazioni*. E ricorderemo a tal proposito la ragionevalissima massima degli analisti, che: *Analysin constituunt praecepta, juxta quas deinde instituitur calculus; qui non analysis est, sed instrumentum analyseos. Praeceptis semel potitis, quivis facile calculum instituit, more quisque suo; hic prolixius, ille magis concinne, prout unicuique faverit Minerva.*

Note aggiunte.

(*t*) A distruggere ancora, nell' animo de' dotti contraddittori, lo scrupolo di aver io detto, che *un tal problema servirebbe di convenevole supplemento a quelli delle* TAZIONI, non debbo far altro, che produr loro innanzi il seguente titolo della Memoria del Paucker, inserita negli Atti di Pietroburgo pel 1831: esso è il seguente · *Sur une quéstion de Géométrie relative aux Tactions des cercles.* Mi lusingo che dopo ciò possa l'autorità di quest' Accademia quietarli su di un affare, che per se non ne aveva bisogno.

(*u*) Così ne giudicai allorchè scrissi il programma, non avendo avvertito a quello che se ne legge ripetutamente negli *Annales des Mathématiques*, che pubblicavansi in Lione da valenti geometri, enunciandovisi un tal problema nel seguente più general modo: *In una piramide qualunque, ec.* Nè credo che per tale inavvertenza si voglia essere inesorabili verso me, mentre alcuno non l' è stato col Gergonne, principal compilatore di quella raccolta pregevole, per aver ignorata l' esistenza della soluzione del Malfatti del problema precedente, inserita non in un giornale, ma negli Atti di una delle più distinte società dotte di Europa.

Di questo problema non avendo i risponditori al programma trovato vestigio di soluzione, su cui fondar al solito le loro ricerche, ricorsero da prima all' espediente di annunziarlo per *più che determinato ed impossibile* (*Giorn. dell'*Omnibus *del dì 8 maggio 1839*); era questa la migliore sfuggita per liberarsi da ogni obbligo di occuparsene. Avvertiti in seguito dalla lettura da me fatta in Accademia, nella seconda tornata di agosto, della gran diversità che passasse tra problema *più che determinato, impossibile*, e che abbisognasse di *determinazione*, ripiegarono nella *Risposta al programma* in darlo *come mal proposto*. E finalmente nella prefazione pubblicata in seguito, ora come mal proposto, ed ora come più che determinato si annunzia, e sempre conchiudendo, che non valga però lor la pena di trattarlo. Or trovandomi di già aver per quest' oggetto espressamente ragionato nella parte 2. delle seguenti *Considerazioni*, e dilucidati que' luoghi di Pappo, che per poca pratica nelle cose geometriche gli si rendevano inintelligibili, e però da essi male interpetrati, crederei abusar troppo della bontà del pubblico, ripetendo qui le cose stesse, che per altro a' bene istituiti sono ovvie. Solamente mi limiterò a far osservare, che anche il problema *d' iscrivere in un cerchio dato un poligono, sicchè i lati passassero per punti dati*, l' è più che determinato in molti casi, indeterminato in altri, come si è accennato a pag. x

della *dichiarazione*; e pure chi mai, tra' tanti sommi matematici che lo hanno trattato, ne ha per queste insussistenti ragioni rigettata la ricerca; le quali presso a poco toglierebbero a dirittura a' geometri il piacere di trattar problemi, ed a' contraddittori la pena di occuparsene, quando gli trovassero già prima da altri risoluti. Ed a chiunque di animo non prevenuto, e di scienza più regolare avrebbe fatto pur qualche peso, il trovare ripetutamente proposto lo stesso problema da distinti matematici, per lo spazio di più di venti anni, senza che mai alcuno pur per ombra si fosse al loro strano ripiego appellato.

CONSIDERAZIONI GENERALI

SU

TRE DIFFICILI PROBLEMI

E SUL

MODO DI RISOLVERLI

Lette alla R. A. delle Scienze di Napoli in agosto 1839.

PARTE I.

Natura delle quistioni proposte, e ragioni di loro scelta.

Altra volta, e sono già degli anni parecchi, presentai a quest' Accademia alcune mie considerazioni su' metodi in Matematiche, le quali miravano a stabilire il valor di questa voce troppo vagamente usata di presente, ed a dar di essi una più chiara idea per la maniera di adoperarli. Argomento è questo di somma importanza; poichè in esso l' invenzione, e tutta la scienza di coloro, che sanno usarne riposa; e quindi da ciò l' aumento delle Matematiche, opera di que' pochi, che al grado d' inventori possono con ragione aspirare, e delle Accademie cui questi soli, avuto riguardo allo scopo ed istituzione di esse, han dritto di appartenere. Che però non dovrà dispiacervi, miei dotti colleghi, se dopo lungo silenzio, io ripigli lo stesso argomento ora, che un programma di tre quistioni geometriche importanti, e difficili da me proposte a premio, me ne porge l'occasione.

Mirava tal mio programma a far dal fatto valutare l' energia o i difetti di ciascun metodo geometrico, o geometrico-analitico, per trarne conseguenza di doverli, chi vuol calcare con sicurezza le vie dell' invenzione, tutti apprezzare, convenevolmente usandoli; e far toccare con mano, che chi ignora la Geometria antica, e che non abbia ancor per questa parte dell' umano sapere obbedito al precetto Oraziano:

Vos exemplaria Graeca
Nocturna versate manu, versate diurna.

con la sola conoscenza de' metodi geometrico-analitici, per quanto genio abbia, e per quanto studio impieghi, non giugnerà mai ad ottenere la compiuta soluzione di un problema [1]. E se quel sublime e penetrante ingegno del Cartesio, nato fatto all' invenzione, per non aver coltivati gli antichi quanto conveniva, meritossi dal suo compatriota Fermat la giusta taccia di *essere ancor esso uomo nelle cose geometriche*: che dovrà poi dirsi di tutti coloro a' dì d' oggi, che in ingegno e penetrazione impari d'assai al Cartesio, osan disprezzare, perchè affatto non delibarono, que' puri fonti del greco geometrizzare, da' quali attignesi infinito sapere. E se l' immortal Newton, che i suoi stessi emuli tennero per una mente media tra gli angeli e gli uomini, dolevasi, essendo già vecchio, di non aver abbastanza studiato, e meditato su di Euclide e gli altri antichi geometri, con quella diligenza che dovevasi in autori di tanto merito, e fosse con troppa sollecitudine passato a Cartesio ed agli altri moderni: di quanto pentimento non dovrebbero esser compresi coloro, che Euclide e gli antichi mai non videro, e che nè men del Cartesio e degli altri, che il nuovo metodo geometrico-analitico coltivarono e promossero, tenner conto, limitando tutto il loro studio a qualche moderna istituzione; donde poi dalla poca scienza che ne raccoglie ciascun di costoro avverasi, che *professus grandia turget*; nè altro crede rimanergli ad apprendere. Senza lo studio degli antichi non si potrà mai riescire ad ottenere quella eleganza di soluzioni che ragionevolmente si richiede dagli accurati geometri, e che sì ben espresse l' Halley, dicendo: *Verum perpendendum est*, *aliud esse problema aliqualiter resolutum dare*, *quod modis variis ple-*

---

[1] La *compiuta soluzione di un problema* consiste in un' analisi diretta e chiara di esso; ed in una costruzione, che naturalmente da questa derivi, e che possa dimostrarsi risolvere il problema, invertendo il cammino dell' analisi.

rumque fieri potest , aliud methodo elegantissima id ipsum efficere : Analysi brevissima , et simul perspicua , Synthesi concinna et minime operosa [1] . E ciò sebben di passaggio , nè men sia quì notato a caso , essendo sì corrotto il gusto de' nostri giovani matematici , da valutare ad un modo stesso ogni soluzione , e talvolta creder da meno la più elegante , chiamandola purò esercizio di scuola ; e di non curarsi affatto della costruzione : e ben di ragione per essi ; poichè questa talvolta riescirebbe assai più difficile di una nuova soluzione , o al manco di una complicazione senza pari .

Or dovendo chi imprende a trattare un geometrico problema aver riguardo alla *determinazione* di esso , per assicurarsi al dir di Proclo , *quando quod quaeritur problema possibile sit, et quando inpossibile* [2]; o anche , come più distintamente la specifica Pappo : *Determinatio est , quae declarat quando et qua ratione , et quot modis problema fieri possit* ; all' *analisi* del medesimo , cioè alla *risoluzione* , ed alla *composizione* , che comprende insieme la *costruzione* , senza la quale un problema geometrico non può dirsi risoluto , nel che errano principalmente alcuni di coloro, che vi adoprano la moderna analisi , non facendo corrispondere la qualità del risultamento a quella de' dati ; e finalmente alla *dimostrazione* ; dovevan dunque quelle mie proposte mirare a siffatte quattro cose , per vedere come con ciascun metodo vi si riescisse ; e perchè con uno potesse più facilmente ottenersi ciò , che con difficoltà conseguivasi con l' altro .

Da ciò potrete ora Voi stessi , miei colleghi , conoscere i motivi, perchè io preferii ad altre le tre quistioni che proposi . Con la prima delle quali dimandava di un famigerato problema analiticamente ri-

---

[1] Praef. in Apollonii Pergaei libros *de Sectione Rationis*.

[2] Lib. 2. *Comment. in primum Elem. Euclidis* .

soluto dal principe de' moderni analisti, il de là Grange, la geometrica costruzione, invano ricercata, e tentata invano per più di sessant' anni; e per confermare la deduzione esatta e regolare di essa dall' analisi da quel sommo uomo esibita, ne richiedea pur la corrispondente analitica dimostrazione. Addiceva il secondo premio ad un problema, che già conta da che fu la prima volta manifestamente proposto gli anni del presente secolo, senza che abbia ancor ricevuta una soddisfacente soluzione. Finalmente col terzo quesito proponeva un problema analogo, da non potersi risolvere senza la corrispondente *determinazione*, la quale valesse a stabilire le condizioni da rendere il problema possibile o impossibile; nè questa a me si apparteneva, altrimenti avrei ben data la soluzione che dimandava: il che per comprovare con l' autorità di tutt' i geometri, recherò il seguente luogo di Pappo: *Quaerentis enim officium est*, *et hoc determinare*, *et id quod fieri*, *et quod minime fieri potest*; *et si fieri potest*, *quando*, *et quomodo*, *et quotupliciter fieri possit*.

Ma pure enunciando un tal problema feci tanto da indicare, a chi per poco fosse nella Geometria usato, la necessità di tener conto della determinazione di esso; poichè sebbene analogo ne' dati e nel quesito al precedente, pure in questo dicevasi manifestamente essere il triangolo dato di *specie* e di *grandezza*, mentre nell' altro di esser *data* una piramide, cioè *proposta*, senza alcun' altra specificazione. E pure chi il crederebbe! per quella disusanza ne' metodi geometrici, di cui poc' anzi accennava, dopo parecchi giorni dalla pubblicazione del programma, leggevasi in un nostro giornale un avvertimento caritatevole fattovi inserire da alcuni nostri professori, di non occuparsi di tal problema, essendo *più che determinato*, *e quindi impossibile*: le quali due cose nè men potevansi insieme accoppiare, essendovi ben differenza tra *più che determinazione*, ed *impossibi-*

lità di un problema , nè questa essendo conseguenza di quella . E di tale superflua ed incongrua manifestazione nè pur contenti, ne hanno poscia fatto grandissimo rumore ; senza aver mai osato produrre alcuna ragione di tale loro sentenza .

E giacchè la presente circostanza dimostra richiederlo , ripeterò cose che a' bene istituiti sembreranno superflue .

Il problema è quella proposizione con la quale proponesi a ritrovare o costruire alcuna cosa ; al che ottenere esigonsi convenevoli dati , ed un corrispondente quesito. Or la convenevolezza de' dati, e del quesito l' è nel *numero* , e nella *proprietà* ; e quando ciò avviene , il problema si dice *determinato* pienamente . Che se vi sia deficienza nel numero de' dati , il problema si dirà *indeterminato* ; e sarà suscettivo d' infinite soluzioni, ciascuna delle quali corrisponderà ad uno stesso luogo geometrico, che abbia per proprietà il quesito del problema ; che però esso potrà facilmente trasformarsi in teorema. Se poi al contrario vi fosse eccedenza nel numero de' dati , supponendoli l' un dall' altro indipendenti, il problema si direbbe *più che determinato* : e da esso, volendolo risolvere , se ne potrebbero formare problemi diversi determinati, supprimendo or l' un dato superfluo , or l' altro .

Può esservi poi sconvenevolezza ne' dati , o nel quesito di un problema relativamente alla proprietà loro, quando vi sia tale affezione di essi che geometricamente ripugni ; e questa o assoluta , vale a dire da dover sempre aver luogo, o relativa , che abbia però luogo in alcuni casi: nella prima circostanza il problema sarà *impossibile* ; nella seconda vi sarà bisogno di *determinazione*. E se nel primo caso l' impropriètà geometrica risulti manifestamente da una verità fondamentale di Geometria , il problema sarà mal proposto, e da non doversene affatto tentare lo snodamento : che se ciò non si avveri, l'analisi stessa del problema dovrà manifestarne l' impossibilità . Nel secondo caso

poi, cioè quando v' è bisogno di determinazione, dee colui che il risolve cercarla, e valendosene risolvere il problema; come dal surriferito luogo di Pappo chiaramente rilevasi.

Di problemi determinati se ne ha piena conoscenza dagli Elementi stessi di Euclide; e per gl' indeterminati può ancor da essi rilevarsi esempj, trasmutando in problemi alcuni di que' teoremi ne' quali la proprietà di qualche luogo geometrico si dimostra. Così dimandandosi di *costruire su di una data base un triangolo rettangolo*, o pur *che abbia un dato angolo verticale*, la prop. 32. El. III. nel primo caso, e la 21 nel secondo li dichiarerebbero indeterminati. Ed è ancor facile rilevar dagli Elementi stessi esempj di problemi più che determinati. Tal sarebbe, per un esempio, quello di: *costituire sopra una data base un triangolo di data aja, con un dato angolo verticale, ed avente i lati in data ragione*; perchè è chiaro, che due di tali dati sieno sufficienti alla piena determinazione di siffatto problema: che però, o possa richiedersi che il triangolo costituito sulla data base *avesse l' aja data, e dato l' angolo verticale*, o pure, che *avesse dato l' angolo verticale e la ragion de' lati*, o finalmente che *fosse data l' aja e la ragion de lati*.

E proseguendo sempre a trarre esempj dagli Elementi stessi, poichè di maggior chiarezza e facilità riescono; sarebbe *impossibile* il problema di *: iscrivere in un cerchio un romboide equiangolo ad un dato*; poichè dalla 34. El.I. rilevasi che gli angoli opposti di quel quadrilatero debbano esser tra loro uguali, e quindi nella somma maggiori, o minori di due retti; e dalla 22. El.III. si deduce, che essi dovrebbero pareggiar due retti, quando fosse il quadrilatero iscritto nel cerchio. Dell' altro caso poi d' improprietà relativa ne' dati, in cui si è detto abbisognarvi *determinazione*, ne offre un esempio Euclide nella 27. El. VI., alla quale appositamente premise la corrispon-

dente determinazione. E tal sarebbe per un altro esempio il problema di: *descrivere un cerchio per quattro punti : o di iscrivergli o circoscrivergli un quadrilatero simile ad un dato*. Ma sia per ora abbastanza detto su di ciò, che ancor superfluo a me pare, per dimostrare la genuinità del problema *della piramide* proposto nel programma : sebbene altro ancor mi rimanga a dire di positivo su tal proposito, che serbo alla parte II. del presente discorso, ove la storia di questo più che difficil problema dovrò esporvi.

Di simili casi abbondano tutte le opere degli antichi geometri, e le restituzioni di talune perdute di queste, principalmente quelle eseguite dal Simson [4], il quale stabilì ancora a tal proposito un' assai convenevole dottrina, che per chi l' ignora sarà bene quì ripetere: *Veteres duabus determinationibus utebantur, quarum altera ex altera sequitur, et quarum prima constructioni problematis necessaria est quae propterea compositioni semper praemittitur, altera vero quae compositionem sequitur, inservit ex iis, quae data sunt in problemate statim dignoscere, utrum construi possit vel non possit, quod quidem ex prima determinatione, vel duabus primis, si duae sint, ut in problematibus lib. II., quae determinationes habent, cognosci non potest, priusquam ad illam ultimam deducta fuerit prima aut alterutra ex primis si duae fuerint. In problematibus simplicioribus, hae prima scilicet et ultima in unicam determinationem saepius coalescunt* [5].

Or premesse queste generali considerazioni necessarie a distinguere la qualità de' problemi, e 'l modo da condurne la soluzione; a quale rubrica apparterrassi quello della piramide proposto nel programma?

[4] *Apollonii* Locorum Planorum *lib. II. restituti* – De Sectione Determinata *lib. II. restituti, et duobus aliis adjectis*.

[5] *Praef. in libros* de Sectione determinata.

Al che conoscere riflettasi, esser nella piramide isoscele il problema sempre possibile ; e che siccome se quattro sfere vicendevolmente si tocchino, da' quattro piani tangenti esse a tre a tre può costituirsi una piramide determinata di specie e di grandezza, così potranno a questa iscriversi quelle quattro sfere nel modo richiesto nel problema : e potendo quelle quattro sfere tangenti variare di raggi, e di posizione ; si vede però bene, che infinite saranno le piramidi per le quali il proposto problema può risolversi. O pur volendo proseguire in altro modo siffatte geometriche indagini semplici e dirette, sulla natura del presente problema, avrebbesi potuto osservare, che toccandosi tre sfere date, se ad esse due a due intendansi circoscritti i coni tangenti, potrà un piano girar sempre intorno a due, toccandole, e toccando ad un tempo il cono rispettivo circoscritto, passando per un lato di questo ; che però se immaginisi una quarta sfera toccare le proposte, quel piano tangente indeterminato di sito, lo diverrà determinato toccando ancor questa quarta sfera ; e quindi da' tre piani tangenti le quattro sfere, in tal modo assegnati, risulterà una piramide con quel quarto piano che toccava esteriormente le tre sfere proposte. E di siffatte piramidi se ne otterrà infinite, facendo variare il solo raggio della quarta sfera, senza nè men concepire variabili le tre da prima stabilite. Il problema proposto non è dunque *più che determinato*, e molto meno *impossibile* ; ma dee risolversi aggiugnendovi la conveniente *determinazione*, sia che questa si voglia per le dirette vie geometriche assegnare, sia che debba ripetersi indirettamente dall' analisi algebrica, e per cammino assai più lungo e complicato. E non voglio tralasciare in questa circostanza di ripetere, ciò che si diceva ad altro proposito nel programma, che attualmente ognuno limita la scienza a quel tanto ch' egli vi sa vedere, senza prendersi affatto briga di leggere e riscontrare le opere, e le ricerche di uomini consumati in

essa ; che pure , sebbene nelle Matematiche l' autorità non valga , qualche cosa valgon però le considerazioni in casi simili . Che se coloro , chiunque si fossero , i quali francamente avventurarono la proposizione scritta nel giornale, si fossero imbattuti a leggere la memoria del Lexell sul problema del Cramer, o quella del nostro Annibale Giordano , o gli *Opuscoli della scuola del Fergola* , avrebbero da essi rilevato , che il Lexell nel cammino di sue ricerche su quel problema , giudicò indeterminato l' altro , ch' egli stesso proponeva , d' : *iscrivere in un cerchio dato un quadrilatero i cui lati opposti concorressero a punti dati*, e pur ne raccolse un' elegante proprietà di tali quadrilateri : che posteriormente il Giordano giudicò questo problema per più che determinato generalmente proposto , e per indeterminato con una special limitazione; nè però si ristette dal riguardare una tal quistione , come nel presente caso nostro , che di ben altro risultamento è fecondo , si è con troppa precipitanza erroneamente affermato . E che da queste loro dispari opinioni la Geometria ha guadagnato pur qualche cosa, nella convenevole spiega di tal paradosso geometrico , che vedesi ne' poc' anzi citati opuscoli .

Ma volendo ancora render ragione de' motivi che mi hanno indotto a preferire tre quistioni già antiche , e ripetutamente tentate , dirò in breve : I. di esser esse attissime allo scopo propostomi, e di facilitar grandemente il giudizio sulle soluzioni che se ne daranno , conoscendosene già abbastanza la difficoltà in trattarle , anche da chi non abbia profondo saper geometrico , e che dalla semplicità di una soluzione potrebbe talvolta giudicare erroneamente della facilità della ricerca fatta per riescirvi. Nè è la prima volta , che abbiamo avuto a dolerci di sì poco lodevole trattamento [*] . E poi chi non sa esser proprio del nostro

[*] Veggasi la *Conchiusione degli Editori* in fine de' primi tre *Opuscoli della scuola del Fergola* .

spirito il voler riescire in ciò precisamente, che da sommi uomini siesi per lungo tempo invano tentato. E senza dubbio, che per siffatte ragioni il Viviani, il Cartesio, il Fermat, il Vieta, il Ghetaldo, lo Snellio, il Newton, l'Halley, il Simson, il Fergola, il l'Huilier, lo Scorza, ed altri ancora tra' moderni geometri attesero, con grandissimo studio, più che in ogni altra cosa a restituirci ricerche perdute dell'antica Geometria, o nelle quali alcun di essi credè che quelli non fossero riesciti. II°. Che una nuova quistione ancora ignota nulla toglie alla scienza ed al valor de' metodi; ma ben gli offende quella che per lungo tempo si è ad essi dimostrata restìa; e conveniva però che una volta si restituisse a' metodi in Geometria quel potere ch' essi hanno di nulla ricusare a' geometri che sanno adoperarli. III°. Finalmente, come già indicai nel programma, essi eran tali, che compivano interamente argomenti a diverse riprese trattati in nostra scuola, e pubblicati fino al segno cui si era potuto giugnere, o negli *Opuscoli*, o anche negli Atti di cotest' Accademia.

Ma perchè tutto il fin qui detto il possiate più chiaramente rilevare, ed altri argomenti si aggiungano a comprovarne la scelta, eccomi a tesservi, per le quistioni proposte, brevemente la storia delle ricerche per esse fatte, e l'analisi di queste, da servir di base al giudizio, che dovrà, da' miei colleghi della classe matematica, pronunziarsi su quelle che sono state presentate. Dopo di che porgeranno ancora a me conveniente materia pel parallelo che dovrò istituire delle diverse soluzioni, e con diversi metodi date di que' problemi: donde mi sarà poi facile passare all' oggetto che per questi mi ho da principio proposto; e tentare, se fosse possibile, di far terminare pur una volta tante vane dispute, che pregiudicano a' progressi veri delle Matematiche, ed alla buona istituzione in esse.

PARTE II.

STORIA CRITICA DE' TRE PRECEDENTI PROBLEMI.

Il problema d': *iscrivere in un dato cerchio un triangolo, i cui lati passassero per tre punti dati*, fu nel 1742 proposto dall' insigne analista Cramer all' illustre geometra Castiglioni di Berlino [7]; ed al Cramer era stato, essendo giovane, proposto da altro vecchio geometra, ed egli lo aveva infruttuosamente tentato: ed il Castiglioni pensava, ch' esso fosse stato già precedentemente più volte riproposto, soggiugnendo: « *il semble, que le petit nombre des géomètres qui » le connoissoient, le gardoient pour embarasser les autres dans » les occasions* [8]. Sicchè a farla breve, da che esso comparve la prima volta in iscena finora, può ben contarsi per circa il secolo e mezzo. Nè più felice il Castiglioni in risolverlo, lo aveva già messo da banda, per attendere all' altro lavoro della *raccolta degli Opuscoli del Newton*, per la quale facevagli premure lo stesso Cramer, quando tredici anni dopo ricomparve lo stesso problema in Aia, a proposta di un anonimo; ed il Castiglioni essendone stato avvertito dal suo

[7] » Dans ma jeunesse, j' avais le gout que vous avez; un vieux géomètre, » pour essayer mes forces en ce genre, me proposa le probleme que je vous pro» pose: tentez de le resoudre, et vous verrez combien il est difficile «. Così scriveva il Cramer al Castiglioni.

[8] Vegg. l' introduzione alla memoria del Castiglioni inserita nel vol. degli Atti di Berlino per l' anno 1776. — Un tal problema era stato di nuovo conio inventato da alcuno, o pure desunto da Pappo, generalizzando il caso particolare che ne tratta nella prop. 117 lib. VII, delle sue *Collezioni Matematiche*.

amico M. Bouquet, raddoppiando gli sforzi, riescì finalmente, dopo lungo tempo, a risolverlo [9], prevalendosi di due lemmi dell' inesausta miniera delle *Collezioni Matematiche* di Pappo: ed egli presentò la sua soluzioue all'Accademia di Berlino. L' illustre de la Grange, che teneva allora un posto distinto in quest' Accademia, non isdegnò di farne l' oggetto di sue analitiche ricerche [10], prevalendosi di un noto principio trigonometrico, e di un altro che come nuovo il Castiglioni imprese a dimostrare, derivandolo da due lemmi geometrici; nel mentre esso è una facil conseguenza di noti principj elementari di Trigonometria [11]. Egli però mirabilmente usando di sua scienza, appena potè giugnere all' equazione per tal problema, non senza involgere in forma più breve alcune espressioni, che siffatta equazione implicano, e che assai greve ne rendono lo sviluppo; ed ivi arrestossi, non compiendone però la soluzione. Il che considerando il sommo Eulero, non si rattenne dal dire: *se dubitare utrum solutio analytica illustris de la Grange ad aliquam expeditam et concinnam constructionem geometricam perducat* [12]. E però imprese a darne un altra soluzione, alla quale premise quella del problema recato da Pappo, col qual titolo presentò la sua Memoria, che vedesi ne' *Commentarj nuovi di Pietroburgo* per l' anno 1780. Ma quanta

---

[9] Il Castiglioni, dopo che gli pervenne notizia della proposta dell' anonimo di Aia, presentò la sua soluzione all'Accademia nel 1776, cioè dopo 34 anni da che aveva cominciato ad occuparsene.

[10] Il de la Grange ne inviò la soluzione al Castiglioni l' indimani che costui lesse la sua all' Accademia.

[11] Vegg. l' *Opuscolo II. della Raccolta della Scuola del Fergola*, e la mia Trigonometria.

[12] Veg. la memoria di Lexell nel volume de' *Commentarj nuovi* di Pietroburgo per l' anno 1780.

importanza si ponesse a quel tempo in risolvere un tal problema potrà rilevarsi dal vedere, che contemporaneamente all' Eulero il suo discepolo Nicola Fuss, seguendo sulle orme del suo maestro un metodo misto, ne esibì altra soluzione ; e che il di lui condiscepolo Lexell faceva i più grandi sforzi per costruire l' equazione ottenuta dal de la Grange, senza avervi potuto compiutamente riescire . E siffatti due lavori su di uno stesso problema meritaron luogo nel volume de' *Comentarj* poc' anzi citato , in seguito di quello di Eulero : sicchè una sì cospicua Accademia non istimò indecorso di tanto occuparsi in questa sola geometrica ricerca . E potrà anche conoscersi , che , nel breve intervallo di quattro anni, due Accademie delle principali di Europa avessero a gara trattato uno stesso problema , in cui si erano adoperati cinque de' più illustri geometri ed analisti, tra' quali niente meno che l' Eulero , ed il de la Grange . Dopo questi lavori di sommi matematici , un illustre geometra ed analista di Ginevra (Simone Lhuilier), che tenendo allora la cattedra un tempo occupata dal Cramer , riputavasi come di dritto chiamato ad occuparsi ancor egli di tal problema , intraprese ad estenderlo al poligono, e dubitando quasi della possibilità per una soluzione geometrica , come avrebbe desiderato , si risolvè a trattarlo algebricamente : partendo dunque dagli stessi principj del de la Grange , pervenne a risultamenti analoghi , e del pari imperfetti [13]. Ma egli fece anche di più , mostrando una via da poter passare dalla soluzione del problema pel cerchio a quella per le curve coniche in generale , la quale quantunque non rigorosamente geometrica, pure l' era degna di considerazione, come il primo passo che davasi per universalizzare quel problema ; ed inoltre lo estendeva ancora alla sfera , del che aveva qual che cosa accennato oscuramente l' Eulero , ed ancora ad altri so-

---

[13] *Mémoires de l' Académie de Berlin an. 1796.*

lidi di rivoluzione, come agli ellissoidi, paraboloidi, ed iperboloidi. E già prima di esso il sig. Giordano allievo del Fergola, in età di soli 14 anni, sotto la direzione di maestro sì eccellente, aveva risoluto con grandissima facilità ed eleganza, usando il metodo geometrico antico, il problema del Cramer, e ne aveva estesa la soluzione al poligono: il che, sia detto di passaggio, non poteva ottenersi che dal solo metodo geometrico da lui adoperato; che certamente nessuno oserà estendere sì facilmente una soluzione geometrico-algebrica dal caso particolare al generalissimo. Ed è degno di particolare avvertenza, che costui al contrario del Lhuilier si dimostrava desideroso di veder questo problema pel poligono algebricamente risoluto [14]. E fu di tanto merito la soluzione del Giordano, che il Lorgna fecela inserire nel vol. IV. delle *Memorie della Società Italiana*; e che il celebre professor Malfatti non isdegnò, ripigliando gli stessi principj, di compierne altra soluzione, che fu nel volume stesso inserita. E dopo tutt' i già detti, anche il Carnot, che onorò di molta lode la soluzione del giovine napoletano, trattò lo stesso problema nella sua *Géométrie de position*; e più appresso ritornava il Lhuilier, nella sua dotta opera dell'*Analyse géométrique, et algébrique*, ad occuparsene, esibendone una soluzione geometrica, che desunse da quelle del Giordano e del Malfatti con qualche modificazione, ed un' altra algebrica, che traeva da quella del de la Grange, e da lui estesa; e s' introduceva a queste dicendo » L'application générale de la méthode des coordonnées aux problèmes précédens me paroit conduire à des expressions trop compliquées, soit » dans la recherche, soit dans les resultats, pour qu' il me paroisse » convenable de suivre ce procédé. Le procédé de la Grange me pa-

---

[14] Si riscontri la nota c al programma.

roit le plus simple, et c'est celui que je vais exposer [15] «. Nè dopo ciò si rimasero i geometri e gli analisti dal considerare sì specioso problema. Ed è opportuna cosa di quì notare, che ritornato esso di nuovo in nostra scuola, ricevè per mano del prof. Scorza una generale elegantissima soluzione, facendola dipendere da un nuovo principio geometrico dimostrato da Roberto Simson, che riputollo un *porisma* Euclideo; e che egli il primo vi fece anche rilevare il caso in cui quel problema rimanevasi indeterminato, compiendo e perfezionando la soluzione di esso alla maniera greca, con la conveniente *determinazione*, ed aggiunse altre ricerche analoghe al problema stesso.

Dopo tanta luce sparsa dalla Geometria antica su di un problema sì difficile, mancavane tuttavia una soluzione compiuta fatta con l'analisi moderna, non potendo tenersi alcun conto di quella lasciata imperfetta dal La-Grange, come si è già detto: sicchè questa vedevasi costretta non pure a dover cedere il passo all' antica, che sì bene, ed in più modi se n'era finalmente impossessata; ma a tacersi assolutamente innanzi ad essa. Ed a toglierle quest' onta impegnossi con tutta la sua arte il più grande olimpionico della moderna Geometria analitica, che sapeva ben a proposito adoperarla, ed isfuggire i difetti, che non tralasciava però di riconoscervi, e confessarli, il sig. Gergonne, dando ne'suoi *Annales des Mathématiques* (v. VII. an. 1816) una soluzione algebrica pura di questo problema esteso alle curve coniche, e corredandola della corrispondente costruzione; facendo ogni sforzo per dimostrar questa connessa con l' analisi del problema, e da essa dedotta [16]. E posteriormente una quasi identica soluzione ne fu pubblicata (nel 1818) da un nostro professore: ma in questa af-

---

[15] *Elemens d'analyse géométrique, et d'analyse algébrique* §§. 146, 147, 148.
[16] Vegg. la *parte* III. n. 1. delle presenti *Considerazioni*.

fatta non si ravvisa la connessione tra l' analisi e la costruzione ch' ei ne reca, la quale potrebbe far ben sospettare, che gli fosse stata già *conosciuta*, preventivamente all'analisi; e per tale di fatti egli l'annunzia. Ma del merito della soluzione del Gergonne mi serbo a trattare nel parallelo di cui ho più volte detto, che dovrò istituire tra le diverse soluzioni di questo difficile ed importante problema. Per ora mi basterà accennare, esser tale al paragone l' analisi data dal La-Grange, che per ogni nuovo sforzo che si faceva per analiticamente risolvere quel problema, sempre più desideravasi che quella si riescisse a costruire. Al che adoperatosi validamente il mio antico allievo Nicola Trudi, di cui potrebbesi ripetere ciò che ben dicea Giov. Bernoulli di Eulero, *felicissimi ingenii juvenis, a cujus sagacitate et acumine maxima quaeque nobis pollicemur, postquam vidimus quanta facilitate et solertia in adyta sublimioris Geometriae nostro auspicio penetravit*; ed essendo stati gli sforzi di esso coronati da felicissimo successo, mi venne subito in pensiero di accogliere questa circostanza per l' oggetto indicato di sopra, e costituirne un premio pel programma a proporre. Mi lusingava ed ancor mi seduce la speranza, che commossi per tal modo gl'ingegni feraci de'nostri geometri, principalmente de'giovani coltivatori de'moderni metodi, qualche cosa di buono fosse riescito ancora ottenere. Ad ogni modo avremo sempre guadagnato, che l'analisi moderna non mancherà di essere ancor essa concorsa alla soluzione di quest' importante problema, al qual grado non avevano nè men potuto portarla gli sforzi del suo corifeo La-Grange, e del sommo Eulero, non che de'costui valentissimi discepoli Fuss, e Lexell, e forse di tanti altri analisti, che quando gli animi eran caldi e ferventi di tal ricerca, se ne dovettero occupare. Ed inoltre vedrassi, che quando sappiasi convenevolmente procedere, si possa com'è di ragione, ordire ad un'analitica soluzione la corrispondente costruzione

della qual cosa mai alcuno ha potuto pur per ombra dubitare ; se non che questa per la complicazione dell'equazione al problema può riescire alcuna volta tale, da divenire opera più difficile della stessa soluzione, e quindi obliterarla, come l'era nel caso presente della soluzione del La-Grange; o pur che assai inelegante essa risulti. E come che ogni dottrina che non sia in libri di moderne istituzioni, è per taluni nostri presenti matematici un arcano, gioverà qui ricordare quello che notò il Simson, nella prefazione alla sua bellissima restituzione de'*Luoghi Piani* di Apollonio, ripetendolo con le sue stesse parole; che gran precetto in ciò si contiene pe' coltivatori de' modernissimi metodi algebrico-geometrici: *Praeterea, ex rite instituta problematis, vel Loci alicujus, analysi geometrica, compositio haud difficulter, plerumque sponte fluit. Contra autem, postquam locus ad aequationem deductus est; plus negotii et ingenii ad ejus compositionem, ope Canonis generalis, perficiendam, ad aequationis inventionem saepe requiritur. Et hoc quidem multis exemplis ex marchione de l'Hopital, aliisque scriptoribus ostendi facile posset quorum unum adducere satis erit. Canones* $y = c + \frac{bx}{a}$, $y = c - \frac{bx}{a}$ *duo sunt ex iis, quos tradunt auctores pro constructione locorum ad rectam lineam. Videamus igitur quomodo his utantur in constructione loci alicujus, ex. gr. ejus qui habetur in prop.11. lib. I*, de Locis Planis Apollonii *a Schootenio restitutis (pag.246), qui locus, ut a Schootenio resolvitur, ad sequentem aequationem deducitur, viz.*,

$$y = \frac{cdio + efko + ghlo + abnx + cdox - efox - ghox}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}.$$

Tum jubet Schootenius, brevitatis causa, p scribi pro . . . .

$\frac{cdio + efko + ghlo}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}$, *et* $\frac{q}{r}$ *loco ipsorum . . . . . .*
$\frac{abn + cdo - efo - gho}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}$: *quibus substitutis habebitur . . .*

$y = p \pm \frac{q}{r} x$. *Et quoniam aequatio haec , datis p , q et r facile construi potest , putat se satisfecisse aequationis propositae constructioni ; aliud enim nihil, praeter haec quae dicta sunt , pro compositione , hoc est constructione et demonstratione loci propositi affert Schootenius . Atque sic qui viam hanc sequuntur , sibi et in Geometria tyronibus illudunt . Sed praeterquam quod aequatio haec , eique similes* ἀγεωμέτρικαι *prorsus sunt , quis non videt multo difficilius fore invenire ipsas p , q , r geometrice , ut earum ope aequatio construatur , quam aequationem ipsam invenire . . . .* Mi astengo per brevità dal continuare questa bellissima dottrina del Simson , e di farne l'applicazione a' tanti casi di soluzioni , e costruzioni con la moderna Geometria analitica , lasciando ciò considerare a coloro stessi che ne usano.

Ritornando dunque al lavoro del Trudi , dirò , che dopo di aver egli adempiuto al primo quesito secondo il programma, non mancherà di presentare per mio mezzo a questa R. A. tre altre soluzioni dello stesso problema , la prima geometrica co' principj stessi del La-Grange , l' altra ancor geometrica pel problema esteso alle curve coniche ed al poligono ; e la terza per questo stesso problema con l' analisi Cartesiana . Sicchè dopo tutto questo lavoro , se non altro vanto potesse darsi la nostra scuola , nessuno potrà certamente toglierle quello di avere in modo geometrico ed analitico risoluto compiutamente in varie guise un problema, che ha tenuti per lunghissimo tempo, e non con felice successo occupati i mag-

giori geometri ed analisti moderni. Ma io vi soggiungo, che da tutte queste ricerche geometrico-analitiche fatte dal Trudi, l' analisi algebrica avrà conseguito un nuovo metodo, da costruire con eleganza i risultamenti de' problemi geometrici con essa risoluti: e da ciò la medesima, dopo la costruzione Cartesiana, un altro gran passo avrà dato per avvicinarsi al puro, e chiaro metodo geometrico degli antichi. Dal che potrà dedursi, che il lavorare sopra problemi geometrici, non sia un lusso della scienza, ed un esercizio superfluo, come taluni per poca conoscenza credono, potendo in mano di coloro, che son pratici ne' metòdi, e sanno adoperarli a proposito, divenire occasione di nuove scoperte, e prolungamento di quelli. Al che certamente mirando col suo acuto ingegno Gio. Bernoulli pronunziò quella sentenza, da me per tal ragione scelta ad epigrafe del programma, che: *Proponere problemata in publicum non caret utilitate*; *hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset*. Ed in fatti, per non ripeter tante cose, chi non sa, che dal problema *isaperimetrico* abbia avuto origine il *calcolo delle Variazioni*, che forma l' apice de' metodi sull' infinito matematico, con tanto successo promossi ed adoperati da' moderni; e che la Geometria analitica debba pure, per opera del sommo La-Grange, a' problemi sulla piramide triangolare, come più volte ho detto, il modernissimo metodo analitico puro nelle ricerche geometriche; il quale più utile gli si renderà, quando potransi stabilire regole generali, e certe da liberarlo da que' difetti, che ancor si ravvisano nel procedimento di esso. Ma di ciò sia detto abbastanza per ora. Non debbo però tralasciare, perchè tutto sia messo innanzi gli occhi de' miei colleghi di quanto riguarda la storia di questo celebratissimo problema, ed a sempre più comprovare l' importanza, e la difficoltà di esso a trat-

tarlo con la moderna analisi, che il sig. de Poncelet, in una sua dissertazione *sull' uso dell' analisi algebrica nella Geometria* diretta come a disfida al Gergonne, volendo produrre qualche ricerca difficile, ch'egli chiama *prova di fatto* in quest' argomento, propone precisamente il problema del Cramer generalizzato, ed esteso alle curve coniche, e ne esibisce una sua costruzione, tacendo l' analisi che ve lo aveva condotto, che mai più, per quel che sia a mia notizia, si vide comparire. E fu da ciò indotto il Gergonne a quella soluzione sua di cui più sopra abbiamo ragionato [17].

---

[17] E degno di particolare attenzione il seguente squarcio della risposta del Gergonne al Poncelet, sul proposito di cui sopra abbiam detto, che originalmente riporteremo ad istruzione de' nostri giovani matematici « J' ai dit, et je » répéte encore aujourd' hui, qu' on n' a pas su tirer jusqu'ici de la Géométrie » analytique tout le parti qu' elle semble susceptible d' offrir ; qu' on la colomnie » losqn' on la regarde comme peu propre à fournir pour les problémes de Géomé- » trie des constructions simples et élégantes, que la faute parait en être pres- » que uniquement dù à la maniere dont on l' a employée ; et qu' en la maniant avec » plus d' adresse on peut en deduire des constructions qui, *si elles ne sont pas su-* » *périeures à celles de l'ancienne Géométrie, paroissent du moins ne devoir leur rien* » *céder en simplicité, et en élégance* « (del che noi altrove istituiremo parallelo). » J' appuyai ces assertions par quelques exemples ; et je demanderai a M. Ponce- » let lui-même, s' il connoit, en particulier pour les problèmes de Viete et de » Fermat quelques constructions plus directes, plus générales, plus élégantes, et » plus simples que celles auxquelles on est directement conduit par la Géométrie » analytique employée de la maniere que je concois «. Ed egli altrove si doleva con ragione di vedersi le soluzioni del Vieta, e del Fermat pe' problemi delle *Tazioni*, e de'*contatti sferici* ridotte sempre da un problema più difficile ad altro di già risoluto : e sembra a tal proposito che ignorasse, che per quelli della prima famiglia un tal difetto non era nelle soluzioni perdute di Apollonio. Nè io pur por ombra mi dolgo, che il Gergonne, quantunque compilatore degli *Annali* di una scienza, il che l' obbligava a cercar di conoscere quanto d' importante in es-

L'altra delle quistioni da me proposte al premio, per chi la risolvesse analogamente alla dimanda fattane, conta, come diceva, già gli anni del corrente secolo, senza avere ancor ricevuta quella soluzione che ad essa conviene, e che i geometri ragionevolmente dimandano: ed un caso particolare di essa aveva già precedentemente formata parte del problema *trigemello* risoluto da Giacomo Bernoulli; nè so capire come mai quest' uomo sommo avesse potuto tralasciare di generalizzarlo, o che per tanti anni altri non avesse ciò avvertito. Finalmente apparve essa, come problema di riduzione di quello di: *Dato un prisma retto*

---

sa pubblicavasi, non avesse avuta notizia delle soluzioni elegantissime del Fergola pe' contatti circolari, o delle mie per gli sferici, in cui ciascun de' problemi di queste due famiglie è indipendentemente, nella sua generalità, e con assai più eleganza che da lui risoluto: lo stesso per la soluzione del principale de' problemi delle *Tazioni*, fatta dal professore Scorza, o che da me presentata a questa nostra Accademia vedesi inserita nel vol. I. de' suoi Atti. E piuttosto di tale omissione degli *annalisti* ne do a noi medesimi la colpa, che per sistema abbiamo cercato di acquistarci merito con la scienza, e non col diventare noi medesimi i divulgatori di quel poco di buono, che ci hanno permesso le nostre forze, e meschini detrattori delle altrui cose, come da qualche tempo a questa parte par che se ne sia introdotto il poco onesto spregevol costume qui tra noi. Conchiudo finalmente il Gergonne dicendo: » Loin donc que je » croie que l'on doive négliger la Géométrie pure pour l'analyse; je pense, au » contraire, avec M. Poncelet, qu' on ne saurait trop s'appliquer à les cultiver » l'un et l'autre avec un soin égal; mais je pense aussi que s'il peut être souvent » utile de s'aider dans l'analyse des considerations que la Géométrie peut four- » nir, et *vice-versa*; on n' en doit pas moins apporter tous ses soins à tirer de cha- » cune de ces deux branches d'une même science tout le parti que, sans le se- » cours de l'autre, elle peut être susceptible d'offrir «. Ed io mi lusingo, che i nostri giovani matematici, a' quali tante volte abbiamo noi ripetuto un sì vantaggioso consiglio, vogliano esserci grati in sentirlo pronunziato da uno de' maggiori promulgatori dell' analisi pura nelle ricerche geometriche.

triangolare, *cavare da esso tre cilindri equealti al primo*, *e della massima solidità*, proposto al Malfatti, e da costui trattato in una memoria della *Socicsà Italiana* per l'anno 1803 [18]. E per cominciar da ora a valutare di qual tempera esso sia, l'illustre matematico, che ne tentò la soluzione, prevenne i suoi lettori col dire: » Vi sono in » Geometria alcuni problemi, la soluzióne analitica de' quali non si » può presentare senza tedio del lettore, attesa la lunghezza e l'impro- » bità de' calcoli a' quali ha dovuto soggiacere il geometra nella so- » luzione del suo problema, laddove dopo aver conosciuto il vero » risultato, convertendo l'analisi in sintesi simbolica, ed il problema » in teorema, succede parecchie volte, che si possa per una via più age- » vole e piana dare di esso una comoda dimostrazione. Di questa spe- » cie è l' enunciato problema, che mi fu proposto non ha guari, e che » mi parve sul principio di facile soluzione, osservando ch' esso ridu- » cevasi alla iscrizione di tre circoli ne' due triangoli delle basi paral- » lele del prisma, così che ciascun de' circoli toccasse gli altri due, » ed insiem due lati del triangolo. Intrapresa per tanto la soluzione di » questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione in- » golfato in prolissi calcoli, e scabrose formole atte a stancar la pazien- » za di un uomo meno di me ostinato. Superata però la difficoltà, ed » avuti de' risultati assai semplici, tentai cangiando il problema in teo- » rema, aprirmi una via più comoda per la dimostrazione «. Dal quale ragionamento del Malfatti altro non può conchiudersi, che la gran difficoltà, e gli stenti da esso provati nel risolvere il problema di riduzione, che costituisce il nostro assunto. Poichè riguardo alla trasformazione vantaggiosa, ch'egli accenna, dell' analisi algebrico-geometrica, o di parte di essa in un teorema, proponendola ad espediente

[18] Per la soluzione del Malfatti veg. la *parte* III.

generale in casi simili, ciò non toglie, che possa giustamente richiedergli si, qual sia stato il mezzo che lo abbia condotto a quel teorema ; e che quindi egli ricada nella stessa analisi , e nelle calcolazioni assai prolisse durate per essa, e che egli voleva evitare [19] .

Questo lavoro del Malfatti , per non mostrare in fronte scritto il titolo della quistione cui riguardava, era sfuggito agli *annalisti delle Matematiche di Lione* : nè ciò può loro imputarsi a colpa; poichè chi mai potrà oggigiorno compromettersi di conoscere tutto quanto pubblicasi in tal ramo, per materie nelle quali non basta percorrerle leggendo , ma bisogna considerare e sviluppare . I progressi delle Matematiche potranno solo ottenersi dalla lettura de' classici autori, da' quali, oltre la scienza che vi si apprende, traggonsi i semi a farla progredire , e dopo ciò meditando ; non già , come ora costumasi, infarcendosi la mente di titoli di libri, e d' indici d' istituzioni , o percorrendo giornali superficiali , per figurar con parole , e nulla operando . Nè tampoco avendo avvertito alla memoria del Malfatti quel geometra che agli annalisti suddetti il propose, per pubblicarlo nel loro dotto giornale , costoro non mancarono di annunziarlo come nuovo , e di occuparsene ancor essi: donde furono indotti, dopo qualche tempo, a dichiarare ciò che quì giova originalmente riportare : » Sono più » di dieci anni che questo difficile problema si è presentato per la pri» ma volta a' compilatori di questa raccolta ; i quali sebbene lo aves-

[19] Al nostro sentimento è uniforme quello di tutti i matematici che se ne sono posteriormente occupati : e noi riporteremo al proposito la seguente *Nota de' compilatori degli Annali* »Malheureusement cette solution est peu propre à eclairer » sur les moyens par les quels l'auteur l' a obtenue ; elle se réduit uniquement en » effet à former les équations du probléme et les valeurs des inconnues , et a » prouver ensuite , a l' aide des relations entre les données , que les dernieres » satisfont aux premieres .

» sero attaccato a diverse riprese, non poterono per lungo tempo per-
» venire a risolverlo, *e nè anche ad assicurarsi se esso era ri-*
» *solvibile col cerchio e con la riga* (cioè del grado di tal proble-
» ma): per cui non avrebbero pensato a proporlo negli *Annali*, se
» non vi fossero stati spinti da un loro associato.

» Credevano essi ragionevolmente, che il geometra il quale li
» aveva indotti a far rivolgere l' attenzione de' loro lettori su questo
» problema, s' incaricherebbe egli di risolverlo: ma avendo lungo
» tempo vanamente aspettato, stimarono dover fare ancor nuovi ten-
» tativi, e si credettero più fortunati questa volta che le precedenti in
» esser pervenuti, *se non a trovare una costruzione del problema*,
» *almeno ad abbassarlo al primo grado*[10], *ed a ridurre la sua*
» *soluzione ad un calcolo aritmetico assai semplice*«. La qual con-
chiusione basta a mostrare, perchè delle loro ricerche non siesi tenuto
affatto conto da' geometri, che posteriormente hanno trattato lo stesso
problema, tenendolo per nuovo, e non ancora risoluto come convenivasi
alla natura e qualità di esso. Il problema è geometrico, e però a ri-
solverlo nulla vale il calcolo numerico, ma si richiede una costruzio-
ne: e ricorderò a questo proposito ciò che diceva l' Eulero in occasio-
ne della soluzione del de la Grange pel problema del Cramer: *Verum*
quia problema est geometricum, *non tam calculus numericus*,
quam constructio geometrica desiderati solet. Nè poi sì semplice
può dirsi l' analisi che vi ordirono, essendo anzi assai onusta di
principj geometrici involti nelle formole che vi adoprano, e di anali-
tiche combinazioni e riduzioni, che di molti dati per conseguenza, su-

---

[10] Questa espressione è assolutamente erronea: il problema non può abbas-
sarsi di grado cambiando natura. E noi faremo notare in appresso ciò che con-
viensi a tal proposito.

perflui ad una genuina soluzione , la rendono grave . Ma non è questo il luogo da entrare in più particolari per tal soluzione , sulla quale riverremo in appresso.

Posteriormente avendo essi ricevuta dal sig. Bidone , matematico di Torino , la notizia della soluzione del Malfatti [1], e la costruzione alla quale questa lo aveva condotto , nel vol. II° de' loro *Annali* così soggiugnevano : » In luogo di verificare i valori delle incognite sulle e-
» quazioni del sig. Malfatti , i compilatori degli annali preferiscono
» verificarli sulle loro, che sono più semplici , attesochè il sig. Mal-
» fatti impiega sei incognite invece di tre , e che inoltre non avendo
» rappresentate per simboli particolari le distanze de' vertici del tri-
» angolo dato dal centro del cerchio iscritto , le sue formole risul-
» tano complicate di radicali ". « Dopo ciò gli stessi annalisti a pagina 165 del medesimo volume ripigliano quest' argomento , riportando una lettera ad essi diretta dal sig. Thedenat corrispondente della 1ª. classe dell' Istituto , e rettore dell' accademia di Nimes , della quale non è fuor di proposito recar quì il cominciamento. » *Signore* —
» Il silenzio del sig. Bidone , o piuttosto quello di Malfatti , stesso sul-
» la natura delle considerazioni , che hanno potuto condurlo all' ele-
» gante risultamento , che ci avete fatto conoscere a *pag.* 347, 348
» *Ann. vol.* I. , mi ha condotto ad alcune ricerche su questo curio-
» so problema . In verità la soluzione n' è ora conosciuta , e voi a-
» vete provato , *a pag.* 60 *vol.* II. , ch' essa è esatta . Ma non sa-
» pendo per qual via vi si perviene, questa soluzione non può esser
» considerata , che come un teorema , del quale si può ragionevol-
» mente desiderare una dimostrazione semplice come la sua enuncia-
» zione « . Egli continua dopo ciò le sue considerazioni sulla soluzio-

[1] Si vegga su questo proposito la *parte* III.

ne del Malfatti; e dopo lungo calcolo ne deduce quel teorema, mentre senza affatto stento, anzi senza calcolo veruno poteva ravvisarlo immediatamente dalla soluzione del Malfatti, come farò rilevare nella Parte III.

Si fa cenno di nuovo di tal problema dal Gergonne nel vol. VII., all' occasione della risposta al Poncelet, di cui più sopra fu fatta menzione, dicendovi: » Si dee osservare al più, che vi sono alcuni pro» blemi, che sembrano mostrarsi egualmente riluttanti a tutt' i metodi, come per esempio quelli dell' *iscrizione di tre cerchi nel tri» angolo*; *e di quattro sfere nel tetraedo* ». Ed altra volta esso comparisce nel vol. X. degli *Annali* (*an.* 1820), ove sono recate le ricerche sul medesimo del prof. Lechmütz di Berlino, diretto a' compilatori con la seguente lettera.

Berlino il 23 gennajo 1820 — *Signore* — Dando nella vo» stra stimabile raccolta l' istoria del curioso problema, del quale » avrò l' onore di trattenervi, facendo conoscere la soluzione sempli» cissima che n' è stata data da un celebre geometra italiano, ave» te mostrato il dispiacere, che si dovesse giustificare a posteriori la » formola finale del Malfatti, provando ch' essa soddisfi alle equa» zioni, che si tratta risolvere, senza che si osservi come per mez» zo di queste sole equazioni si potrebbe pervenire a questa stessa » formola, se essa fosse incognita, o almeno ad ogni altra equiva» lente, di facile costruzione. Queste considerazioni avendomi de» terminato a ritornare di nuovo e recentemente su questo singola» re problema, sono stato molto felice di ottenere una soluzione, » la cui semplicità ed eleganza vi farà forse giudicare esser tale da » comparire nella vostra raccolta, e che in conseguenza passo ad espor » brevemente, pervenendo alla stessa costruzione del Malfatti; in» dicando anche come conoscere e distinguere i casi del problema ».

Ma questa soluzione del Lechmütz fatta con l' analisi Cartesiana , non è effettivamente che la migiior dimostrazione del risultamento del Malfatti ; di che l' autore medesimo conviene.

Dopo ben sette anni si vide , negli stessi *Annali* , comparire un estratto di una memoria del sig. Steiner, impressa nel celebre e dotto giornale di Matematiche , il quale pubblicasi in Berlino , dal valentissimo matematico , segretario di quell' Accademia sig. Crelle, della cui corrispondenza mi tengo onoratissimo ; nel quale lo Steiner , dopo aver parlato della gran difficoltà del problema di Malfatti , e dell' altro analogo della piramide , passa a generalizzarli , asserendo aver date di entrambi le corrispondenti soluzioni, delle quali nulla possiamo dire , non essendoci pervenuta altra notizia , che quella assai imperfetta , che nel citato luogo degli *Annali* si legge. E da questi rileviamo pure , che lo Steiner proponevasi di pubblicare su tale argomento un' opera espressamente.

Tante ricerche fatte su questo problema da valentissimi analisti , e per tanto tempo , facevano però ancora desiderare di esso una convenevole e diretta soluzione geometrica; al che impegnatosi il sig. Paucker, geometra ascritto all' imperiale accademia di Pietroburgo, riescì a risolverlo , dandone una costruzione elegante , alla quale però non perviensi , *senza aver prima percorsi nove lemmi* , che sono tante nuove speciose verità su i contatti circolari , le quali secondo l' ordine da lui tenuto , costituiscono l' orditura della ben lunga analisi del problema ; e di ben altri undici ne fa bisogno per la corrispondente dimostrazione ; dal che deducesi eziandio , non esser essa nell' ordinario modo dall' analisi derivata : e l' accademia accolse tal lavoro pe' suoi Atti, nel volume per l' anno 1832 [1]. Pervenutomi questo a caso nelle mani , giacchè le nostre biblioteche e le accademie , per nulla pen-

[1] L' orditura di questa soluzione sarà riportata nella parte III.

sano a provedere questi principalissimi libri necessarj al loro scopo, mi posi subito a percorrere una tal soluzione, che oltre la novità, m' interessava, come ho già detto nel programma, per compiere l' argomento delle *Tazioni*, in nuova ed assai elegante maniera trattato dal Fergola, e perfezionare affatto questa parte del *Luogo di risoluzione* delle greche scuole. Ma ad ogni passo arrestavami la complicazione delle figure, anche per la debilitazione de' miei occhi, che non mi lasciava veder bene le linee ed i punti che indicavansi. Messo quindi da banda il libro, mi rivolsi a tentar da me la soluzione: dal che mi avvidi della sua grandissima difficoltà; ond' è che deviato da altre occupazioni, la rimisi ad altro tempo. Intanto avendo di questo problema, e della somma difficoltà da me incontrata in risolverlo ragionato col sig. Trudi, di cui più sopra ho detto, costui, dopo breve tempo, ed in mezzo ad occupazioni, che il deviano pur troppo della scienza per la quale è fatto, mostrommi una sua elegante soluzione di problema sì difficile [13]. E già mi preparava a pubblicarla, quando, conoscendo la natura e qualità del problema, mi venne il pensiero di poter con esso, e con l'altro di cui quì innanzi vi ho ragionato, formar un programma da accrescere stimolo a' nostri matematici, per occuparsi di questo problema, con quel metodo, che avessero creduto migliore in trattarlo; specialmente desiderando conoscere cosa valessero gli sforzi de' nostri valorosi atleti del metodo analitico puro, per sempre più accrescere

---

[13] Posteriormente lo stesso Trudi ha risoluto l'altro problema assai più difficile d': *iscrivere in un triangolo dato di specie e di grandezza tre ellissi simili e similmente poste ad una data, le quali si tocchino tra loro, e tocchi ciascuna due lati del triangolo*. Ed io per sempre più spingere i nostri coltivatori della moderna analisi pura ne' problemi geometrici, gli invito a tentarlo con essa convenevolmente, prima che sia pubblicata la soluzione del Trudi, come avverrà, dopo che l' Accademia nostra avrà pronunziato il suo avviso sulla soluzione del primo di tali problemi.

materia da istituire parallelo tra' diversi metodi d' inventare in Geometria, e della più propria maniera di usarne. E mandato ciò ad effetto, non senza il vostro ajuto, che gentilmente mi avete accordato, di rivedere le risposte, che se ne presenteranno, delle quali un buon numero n' è al tempo stabilito pervenuto al nostro segretario perpetuo: mi lusingo di vedere da buon successo corrisposta la mia aspettazione, tendente ad utilità della scienza che per tutta la mia vita ho coltivata, e cercata promuovere. Ed allorchè di esse risposte ne avrà severamente giudicato la nostra classe matematica, sarà mia cura presentarvi il parallelo delle diverse soluzioni, che finora un tal problema ha avute, per quindi valutare non pure il loro merito assoluto, ma anche il relativo; e far conoscere quanto abbiano a ciò potuto contribuire i metodi adoperativi. Per ora non voglio tralasciare di prevenirvi, esser tale la natura di questo problema, da offrire a chi geometricamente il cerca risolvere nuove verità ed importanti; sicchè la Geometria avrà sempre guadagnato qualche cosa da' tentativi per risolverlo rimasti anche infruttosi. Ed è questo un altro non piccolo vantaggio del metodo geometrico; poichè sicuramente dalle ricerche puramente analitiche fatte per risolvere un problema geometrico nulla rimarrà a raccogliere, quando alla soluzione di esso non si pervenga. Ma di tutte le cose che finora ho accennate solamente, mi serbo a render conto distinto nel mio lavoro che mi sono più volte compromesso presentarvi.

Quel giornale che profferì sul terzo quesito l' erronea sentenza di cui sopra ho ragionato, attribuiva a me l' averlo escogitato; il che io ben volentieri accetterei senza arrossirne, se fossi solito a farmi un manto dell' altrui stoffa: però mi veggo nell' obbligo dichiarare, che, sebbene lo ignorassi, trovavasi esso proposto nel vol I. degli *Annali ec.*, a *pag.* 196, e quindi fin dall' anno 1810, e non

già nel modo come da me n' è stata limitata l' enunciazione, ma dicendovisi generalmente: *Iscrivere in un tetraedo qualunque ec.* Anzi è degno di avvertenza, che mentre quegli accurati compilatori, nel proporre il problema d' *iscrivere in un poligono del numero n di lati altrettanti cerchi*, *tangenti ognuno due di que' lati, e due de' cerchi iscritti*, non tacquero anche il semplice sospetto ch' essi avevano di poter questo essere indeterminato, nulla credettero poi necessario a notare sul problema della piramide, che subito dopo quello soggingnevano, nel modo poc' anzi accennato. Nè tampoco il fecero le tante volte, che riproposero lo stesso problema; nè alcuno mai di que' matematici cui cadde sotto gli occhi tal proposta, e forse provaronsi a risolverla, pur per ombra sospettò della genuina proposizione di questo problema. Ed esso di fatti trovasi identicamente riproposto a *pag.* 287 del vol. II. *Annali ec.*, e poi nel vol. X. a piè di pagina delle ricerche del sig. Lechmütz di Berlino, si trova la seguente nota: « La semplicità di questa solu-
» zione impegnerà forse alcuno a tentar quella del problema analogo
» pel tetraedo, ch' è stato proposto a *pag.* 287 del vol. II. di
» questa raccolta. « Posteriormente il Gergonne ne rinnova l' idea nella risposta al Poncelet, di cui sopra si è detto. Finalmente nel vol. XVII., riportandosi l' estratto del lavoro dello Steiten, si parla anche delle ricerche da costui fatte con buon successo, per la soluzione del problema della piramide.

Conchiuderò dunque, per non più trattenervi in superflue dicerie, che dalle cose esposte rilevasi abbastanza, esser le qnistioni da me proposte al premio assai importanti al progresso delle scienze matematiche, ed atte a conseguire l' oggetto, che nel programma ho dichiarato.

PARTE III.

Esposizione di talune delle ricerche fatte per risolvere i problemi enunciati nel programma.

In questa terza parte , come ho precedentemente promesso , non farò altro che abbozzare tutte quelle materie concernenti le ricerche finora esposte, che essendo meno ovvie , hanno potuto sfuggire l' attenzione de' miei colleghi; perchè possano essi tenerle presenti nella discussione delle risposte al programma : e che dovranno poi a me servire di base al parallelo che mi ho proposto eseguire , ed alla difficile conseguenza, che da questo dovrò trarre , a vantaggio ed istruzione della gioventù , che apprende , o coltiva i metodi d' inventare.

NUM. I.

Soluzione con l' analisi pura recata dal Gergonne al problema del Cramer (*indicata a p.* 33).

Il sig. Gergonne fin dal 1810 occupatosi di tal problema pel solo cerchio , ne diede una soluzione , la quale fu inserita nelle *Memoires de l' Academie du Gard* , che a noi non è stato affatto possibile vedere ; ma ce ne fidiamo a lui medesimo , che ne dà il calcolo come laborioso assai . Posteriormente nel vol. I. de'suoi *Annali ec.* , che corrisponde all' anno stesso , *pag.* 126 , esponeva la sola costruzione di tal problema , supprimendo l' analisi , ed invitando a dimostrarla . Vi fu chi gli avvertì potersi tal sua costruzione

estendere alle curve coniche in generale; e però così enunciollo di nuovo a *pag.* 259 del volume stesso. Dopo ciò egli medesimo vi riporta due altre soluzioni geometriche, l'una del professore Servois, e l'altra di Rochat, che non è se non la sola costruzione: e dee notarsi, che le tre costruzioni si riducono alla stessa cosa; senza addursi dal Gergonne buone ragioni per mostrare l'anteriorità della sua. Solamente osservasi, che egli per menomare il merito delle ricerche di questi due suoi compatrioti, si espresse su di esse dicendo: *altro essere il legittimare col ragionamento una costruzione già conosciuta, altro il pervenire a questa costruzione*: la qual censura potrebbe forse ritornare a suo svantaggio; se posteriore alle ricerche di que' due professori fosse stata la sua analisi. E dopo tutto questo, nel vol. VII. de' suoi medesimi *Annali ec.* (1817) ripigliando un tale argomento pubblicò la seguente nuova analisi di quella già conosciuta costruzione.

PROBLEMA

Iscrivere in una parabola un triangolo i cui lati passino per tre punti dati.

Soluz. Sieno, P, P', P'' i punti dati, S, S', S'' i vertici del triangolo cercato; di tal che P sia su di $S'S''$, P' su di $S''S$, e P'' su di SS'',

È evidente che per la risoluzione del problema basti determinare un solo punto S.

Sia $2p$ il parametro della proposta parabola, il cui asse dinoti quello dalle x, e la tangente nel vertice sia quello delle y; e le coordinate de' punti P, P', P'' sieno come segue

Per P $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$ per P′ $\begin{cases} a' \\ b' \end{cases}$ per P″ $\begin{cases} a'' \\ b'' \end{cases}$

Per S $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ per S′ $\begin{cases} x' \\ y' \end{cases}$ per S″ $\begin{cases} x'' \\ y'' \end{cases}$

E perchè S, S′, S″ sono punti della curva, dee essere

$$y^2 = 2px \ , \ y'^2 = 2px' \ , \ y''^2 = 2px'' \qquad (\mathrm{I})$$

In secondo luogo, perchè ciascuno de' punti P, P′, P″ è in linea retta con due di quelli, dovrà aversi

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{x-a''}{y-b''} \ , \ \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{x'-a}{y'-b} \ , \ \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{x''-a'}{y''-b'} \quad (\mathrm{II})$$

Dal che sei equazioni, per mezzo delle quali posson determinarsi le sei coordinate x, y; x', y'; x'', y'' de' tre punti ignoti S, S′, S″: ma limitando la presente ricerca al solo punto S, basterà eliminare x', y', x'', y'' tra le cinque ultime, e ne risulterà un' equazione in x, y, che combinata con la prima farà conoscere le coordinate del punto richiesto.

Ma si può con una conveniente combinazione di queste sei equazioni ottenerne altre incomparabilmente più semplici. Sottraendo, in fatti, due a due, le equazioni (I) si otterranno le seguenti altre

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{y+y'}{2p} \ , \ \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{y'+y''}{2p} \ , \ \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{y''+y}{2p} \quad (\mathrm{III})$$

Paragonando queste equazioni respettivamente alle equazioni (II), se ne dedurranno le seguenti altre

$$\frac{y+y'}{2p} = \frac{x-a''}{y-b''} \ , \ \frac{y'+y''}{2p} = \frac{x'-a}{y'-b} \ , \ \frac{y''+y}{2p} = \frac{x''-x'}{y''-b'} \quad (\mathrm{IV})$$

che liberandole da' denominatori, e rimpiazzandovi respettivamente $2px$, $2px'$, $2px''$, co' loro valori y^2, y'^2, y''^2 ricavati dall' equazioni (I), esse diverranno finalmente

$$\left.\begin{array}{l} y\,y' - b''(y + y') + 2pa'' = 0 \\ y'y'' - b\,(y' + y'') + 2pa \;\; = 0 \\ y''y - b'\,(y'' + y\,) + 2pa' \;= 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{V})$$

equazioni libere da x, x', x'', tra le quali non rimane altro a fare che eliminare le y', y'', per ottenere il valore di y.

L' eliminazione di y'' tra le due ultime dà

$$\frac{by' - 2pa}{y' - b} = \frac{b'y - 2pa'}{y - b'}$$

che liberandola da' denominatori, e trasponendo diviene

$$(b - b')yy' + (bb' - 2pa)y - (bb' - 2pa')y' + 2p(ab' - a'b) = 0$$

Eliminando finalmente y' tra questa e la prima delle equazioni (V), si avrà

$$\frac{(bb' - 2pa)y + 2p(ab' - a'b)}{(b - b')y - (bb' - 2pa')} + \frac{b''y - 2pa''}{y - b''} = 0$$

e liberando da' denominatori, e riducendo si avrà

$$(bb' + bb'' - b'b'' - 2pa)y^2 + 2\Big[bb'b'' + p\Big(b(a' + a'') - b'(a + a'') - b''(a + a')\Big]y$$
$$+ 2p(a'bb'' + a''bb' - ab'b'' - 2pa'a'') = 0$$

E rimpiazzando y^2 con $2px$, tutta l' equazione sarà divisibile per 2, e potrà dopo essere scritta così

$$\left.\begin{array}{l} -\big(b'b'' - p(a' + a'')\big) \\ +\big(b\,b' - p(a + a')\big) \\ +\big(b\,b'' - p(a + a'')\big) \end{array}\right\} px \left.\begin{array}{l} +\big(b'b'' - p(a' + a'')\big)\,b \\ -\big(b\,b' - p(a + a')\big)b' \\ -\big(b\,b'' - p(a + a'')\big)b'' \end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l} -\big(b'b'' - p(a' + a'')\big)pa \\ +\big(b\,b' - p(a + a')\big)pa' \\ +\big(b\,b'' - p(a + a'')\big)pa'' \end{array}\right\} = 0$$

la quale si riduce ad

$$(\mathrm{A}) \qquad \big(b'b'' - p(a' + a'')\big)\big(by - p(x + a)\big) = \big(bb'' - p(a + a'')\big)\big(b'y - p(x + a')\big)$$
$$+ \big(bb' - p(a + a')\big)\big(b''y - p(x + a'')\big)$$

È questa l' equazione, che bisognerebbe combinare con l' altra $y^2 = 2px$, per ottenere le due coordinate x, y del punto cercato S. E giacchè l' equazione $y^2 = 2px$ è quella della parabola data, e l' altra a combinarvisi è del primo grado, può conchiudersi esser questa l' equazione di una retta che incontra la parabola nel punto cercato S.

Tutto si riduce dunque a costruire le retta dell' equazione (A), o ch' è lo stesso trovare due sistemi di relazioni tra x, y, che vi soddisfino.

Or i due sistemi di relazioni i più naturali a stabilirsi per soddisfarla sono i segnenti [14].

$$B' \begin{cases} (C') & b'y - p(x + a') = o \\ (D') & \left(b'b'' - p(a'+a'')\right)\left(by - p(x+a)\right) = \left(bb' - p(a+a')\right)\left(b''y - p(x+a'')\right) \end{cases}$$

$$B'' \begin{cases} (C'') & b''y - p(x + a'') = o \\ (D'') & \left(b'b'' - p(a'+a'')\right)\left(by - p(x+a)\right) = \left(bb'' - p(a+a'')\right)\left(b'y - p(x+a')\right) \end{cases}$$

Dunque il punto determinato dalle equazioni (B′), ed il punto determinato dalle equazioni (B″), sono i due punti delle direzioni (A).

Si potrebbe, per determinare ciascuno di questi punti, ricavare i valori delle x ed y dalle due coppie di equazioni che li danno:

[14] Pare assai probabile, che quel nostro professore, il quale commutò con l' ellisse la soluzione del presente problema data dal Gergonne per la parabola, ove costui forse usò di un tal ripiego analitico la prima volta, non rimanendone ben soddisfatto, lo avesse saltato di pianta; dal che avvenne poi, che la sua costruzione, che per altro egli ingenuamente dà per *conosciuta*, non si vide più affatto connessa con l' analisi che ne aveva distesa, nè da potersi in alcun modo dimostrare rigorosamente; per cui egli medesimo ne accenna di ricorrere ad una verifica, per saggiarla.

ma è incomparabilmente più comodo di costruire le quattro rette (C′) , (D′) , (C″) , (D″) . L' intersezione delle due prime sarà il punto (B′) , quella delle due altre il punto (B″) .

Esamineremo poi ciò che possono essere le rette (C′) , (C″); per ora occupiamoci della costruzione delle (D′) , (D″) , o per meglio dire della costruzione di una di esse ; poichè si vede bene , che (D″) è per rapporto al punto P″ ciò che (D′) è per rapporto a P′ .

La retta (D′) sarà determinata , se noi conoscessimo due punti qualunque di sua direzione . Or si vede che questa retta passa per P′ , da che segue , che non si tratta più , che di trovarne un altro punto . Or questo sarà dato per due relazioni tra x , y , che risolvono egualmente l'equazione (D′) ; e tra tutte le relazioni ch'è possibile scegliere , le più semplici indubitatamente sono le seguenti

$$(E) \begin{cases} (C) & by = p(x + a) \\ (C'') & b''y = p(x + a'') \end{cases}$$

La retta (D′) è dunque una retta tirata da' punti P′, E′ , e quest' ultimo punto stesso si trova determinato dall' intersezione delle rette (C) , (C″) .

Per ragioni simili , la retta (D″) sarà una retta tirata dal punto P″ , e per un punto E″ intersezione delle due rette (C) , (C′).

La nostra costruzione si trova dunque ridotta così a quella delle tre rette (C) , (C′) , (C″) , o piuttosto a quella della prima solamente ; poichè le due altre sono respettivamente , per rapporto a'punti P′, P″, ciò che questa è per rapporto al punto P [26].

[26] Parrebbe regolarmente che qui si dovesse arrestare l'analisi, e cominciare la costruzione : ma per eseguir questa il metodo adoperatovi esige , che una nuova analisi , tutta ipotetica , arbitraria , e per nulla connessa con la precedente , ch'è quella del problema , si stabilisca sulla locale da costruirsi , come dal

Or sia preso sulla parabola data un punto qualunque (x', y'); la tangente la curva in tal punto sarà, com' è noto,

$$y-y' = \frac{p}{y}(x-x')$$

e riducendo, e ponendo $2px'$ per y'^2, si avrà

$$yy' = p'(x+x') \qquad (1)$$

---

progresso delle ricerche del Gergonne, in questo caso ed in altri simili rilevasi. E siffatto ripiego improprio all' analisi di un problema, potrebbe far sospettare, che si fosse preso *per legittimare costruzione già conosciuta*. Ciò renderà per ora ragione di aver noi detto nel programma, che tuttavia desideravasi di tal problema un' *adequata analitica soluzione*, niun' altra esistendone diversa da questa. E starà però ancor salda l' opinione estrinsecata dal Lhuilier, per la soluzione algebrica di tal problema, da noi ripetuta a *pag.*32., che, come avverte il Gergonne in conchiudere la sua presente soluzione, gli fu principale incentivo a fare ogni sforzo onde riescire in tal ricerca col metodo *delle coordinate*. Ma pure egli avrebbe dovuto ciò dire dopo la prima volta che occupossene, che corrispondeva appunto all' epoca in cui il Lhuilier in quel modo si espresse; ma allora egli medesimo rigettava tal sua soluzione, per intraprenderne un' altra, o piuttosto lavorando col calcolo in altro modo da pervenire più speditamente alla stessa costruzione già ricavata da quella. E forse tutto questo miglioramento, ottenuto da esso, dopo il non corto periodo di ben otto anni, sarà dovuto all' aver evitato di procedere all' eliminazione tra l' equazione $y^2 = 2px$, e l' altra (A) risultamento di un non breve calcolo, mediante quel ripiego analitico di cui si è accennato nella precedente nota, e che al Lhuilier non era certamente noto, quando espresse quella sua opinione. A ciò potrebbe anche aggiugnersi, che mentre il sig. Gergonne mostravasi desideroso della soluzione del problema in quistione per un poligono in generale, promettendo di estendere a questo, *in un prossimo articolo*, lo stesso procedimento tenuto per quello del triangolo, ciò non si vide però aver mal luogo; sebbene una costruzione ne avesse presentata il Poncelet, che circolava in Francia fin dal 1814, della quale promettevane l' analisi, che nè pur credo abbia mai data; nè alcun altro che io sappia finora si è fidato di addentarlo col

Supponiamo in secondo luogo che si tratti di menare alla parabola una tangente per un punto esteriore (a , b) ; rappresentando per x' , y' le coordinate del punto di contatto , si avrà per determinare questo punto le due equazioni

$$y'^2 = 2px' \ , \quad e \quad by' = p(x'+a) \quad (2)$$

delle quali la prima esprime che il punto di contatto è nella curva , mentre la seconda esprime che il punto (a , b) soddisfa all' equazione (1) . Poichè dunque l' equazione $y'^2 = 2px'$ è di secondo grado , e l' altra solamente del primo , si avranno due punti di contatto , e conseguentemente due tangenti pe' punti (a , b) .

Nella ricerca di questi due punti di contatto , in luogo di ricavare dalle equazioni (2) i due sistemi di valori , ch' essi somministrano per x , y , ritorna allo stesso , ed è più comodo di costruire le linee esprimenti queste due equazioni . Poichè dunque la prima è quella della nostra stessa parabola , e che l'altra è solamente del primo grado , dee quest' ultima appartenersi ad una retta , che passa pe' punti ove le due tangenti toccano la curva , cioè a dire che questa retta è la polare de' punti (a , b) .

Si vede dunque da ciò , che le nostre tre rette (C), (C'), (C'') alla costruzione delle quali abbiamo ridotto il problema , non sono altro , che le polari rispettive de' tre punti P , P' , P'' .

Or siccome la polare [26] di un punto dato , nel piano di una sezione conica , può costruirsi con la sola riga , ne segue , che noi possiamo estendere la nostra costruzione ad una sezione conica qualunque : ed ecco a che si riduce .

---

metodo *delle coordinate*. Ma di tutte queste cose altrove dovremo ragionare più estesamente .

[26] La teorica delle polari di cui tanto si fa uso nella moderna analisi pura , è ovvia nella Geometria sublime antica , e compresa nelle istituzioni di questa (*Si riscontrino le Sezioni Coniche illustrate dal Giannattasio*) .

Costruzione. Sieno tre punti P, P′, P″ dati nel piano di una linea di second' ordine qualunque; supponiamo che si tratti d' iscrivere nella curva un triangolo i cui lati, prolungati se bisogna, passino respettivamente pe' tre punti dati.

Sieno S, S′, S″ i tre vertici ignoti, dovendo P trovarsi su di S′S″, P′ su di S″S, e P″ su di SS′.

Sieno costruite le polari de' punti P, P′, P″, e rappresentiamole respettivamente per C, C′, C″; C′ e C″ tagliandosi in E, C″ e C in E′, C e C′ in E″. Sieno tirate PE, P′E′, P″E″, che taglino respettivamente C, C′, C″ in B, B′, B′; allora la curva sarà tagliata respettivamente in S da B′ B″, in S′ da B″B, in S″ da BB′.

Dee osservarsi, al più, che ciascuna di queste rette taglierà la curva in due punti, e che così il problema avrà due soluzioni. Dee osservarsi ancora, come l'abbiamo già fatto più sopra, che tutto può ridursi alla costruzione del punto S, dal quale è facile conchiuderne gli altri due. È dunque superfluo di determinare il punto B, e conseguentemente di condurre la PE.

OSSERVAZIONI.

Dopo aver veduto in quanti modi, e per quanto tempo siesi tentata la soluzione del problema del Cramer generalizzato, ed esteso alle curve coniche, non è fuor di proposito osservare, che negli stessi *Annali ec.*, vol. VIII. (*an.* 1818), recasi del distinto professore sig. Durrande la costruzione di un problema analogo sulla sfera, così impropriamente enunciato: *Iscrivere in un cerchio segnato sulla superficie di una sfera un triangolo sferico, i cui lati passino per tre punti dati sulla stessa superficie*, e poi una tal

costruzione estendesi al caso generale di più punti dati sulla superficie sferica. Ma di quel problema particolare ne aveva già esibita la costruzione l'Eulero, nella più volte citata memoria sul *problema di Pappo*, sebbene in modo poco concepibile: e del generale analogo ne fu da noi recata la soluzione negli *Opuscoli Matematici della Scuola del Fergola* pubblicati nel 1811, riducendolo immediatamente a quello dell'iscrizione di un poligono nel cerchio, ed enunciandolo nel seguente modo: *Dato un cerchio minore in un emisfero, dividerlo in un dato numero di archi, sicchè condotti i cerchi massimi per gli estremi di ciascheduno, passino per altrettanti punti dati nelle superficie di esso emisfero*. Nè sappiamo persuaderci, che una tale soluzione, ed il libro ove contenevasi, pubblicato mentre in Napoli tanta frequenza vi era di francesi, avesse dovuto, dopo il non breve periodo di otto anni, ignorarsi ancora oltremonti; dove parecchie copie di quel libro avevan dovuto pervenire; e se non altre, almanco le da noi donate a distinti soggetti di quella nazione, mentre tra noi dimoravano. Procedendo più innanzi rendemmo universale l'enunciazione, estendendola a qualunque solido di rivoluzione, non escluso il cono ed il cilindro, assegnando per questi i punti dati nello spazio. Dopo tutto ciò conchiudevamo dimandando a' coltivatori della moderna Geometria analitica, di *risolvere e costruire giusta i loro metodi, e per nostro gradimento i problemi generali di coteste mirabili iscrizioni* [17]. Ed ora che il presente programma ne porge più propria l'occasione, rinnoviamo ad essi istantemente le preghiere di occuparsi di queste ricerche, per sempre più raccoglier materia pel parallelo, che ci abbiamo proposto istituire de' metodi per l'invenzione geometrica.

---

[17] Opusc. III. probl. 3, e Conchiusione degli editori.

NUM. II.

Soluzione del prof. Malfatti del seguente

PROBLEMA[18].

Iscrivere in un triangolo dato tre cerchi, che si tocchino vicendevolmente, e ciascuno tocchi due lati del triangolo.

Sia ABC il triangolo proposto, O il centro del cerchio in esso *fig. 1.* iscrittibile, ed A′, B′, C′ rappresentino i contatti di questo co' lati BC, CA, AB; le congiungenti OA, OB, OC divideranno per metà gli angoli rispettivi del triangolo; e le altre OA′, OB′, OC′ saranno perpendicolari a' lati di esso. Ed essendo i tre angoli delle OA, OB, OC intorno al punto O uguali a quattro retti; sarà la somma degli altri AOC′, COB′, BOA′, uguale a due retti: ed è chiaro inoltre essere AC′ la tangente dell' angolo AOC′, CB′ quella dell angolo COB′, e BA′ quella dell' angolo BOA′. Or l' angolo COB′ $= 2$ *retti* $-($*ang.* AOB′ $+$ *ang.*BOA′$)$: che però dinotando con r il raggio del cerchio, e ponendo *tang.*AC′ $= s$, *tang.*CB′ $= t$, e *tang.*BA′ $= u$, per le note formole trigonometriche si avrà l' espressione di

$$u = \frac{r^2(s+t)}{st - r^2}$$

Conviene intanto dedurre da questa espressione alcune conseguenze necessarie per le calcolazioni che seguiranno.

Così si ha da essa

I°. $stu = r^2(s+t+u)$, $\frac{stu}{r^2} = s+t+u$ (1) [19]

[18] Mem. della Società Italiana vol. X anno 1803 *pag.* 235.

[19] Per non lasciare sterili le cose, che qui rechiamo di altri, continue-

II°. Essendo $$u = \frac{r^2(s+t)}{st-r^2}$$

Elevando a quadrato sarà

$$u^2 = \frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{(st-r^2)^2}$$

E si avrà poi

$$r^2 + u^2 = r^2 + \frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{(st-r^2)^2}$$

$$= \frac{r^2(s^2t^2 + r^2s^2 + r^2t^2 + r^4)}{(st-r^2)^2}$$

$$= \frac{r^2(r^2+s^2)(r^2+t^2)}{(st-r^2)^2}$$

E quindi

$$\sqrt{(r^2+u^2)} = \frac{r\sqrt{(r^2+s^2)} \times \sqrt{(r^2+t^2)}}{st-r^2}$$

o sia

$$\frac{(st-r^2)\sqrt{(r^2+u^2)}}{r} = \sqrt{(r^2+s^2)} \times \sqrt{(r^2+t^2)} \quad (2)$$

III°. Si ha inoltre dalla (1)

$$s+t = \frac{(st-r^2)u}{r^2}, \quad \text{ed} \quad (s+t)^2 = \frac{(st-r^2)^2 u^2}{r^4}$$

D' onde

$$s^2+t^2 = \frac{(st-r^2)^2 u^2}{r^4} - 2st$$

---

remo ad andarvi notando alcune opportune riflessioni e conseguenze. E cominciando da questa prima equazione ottenuta dal Malfatti, nell' analisi del suo problema, essa dimostra, che: *In un triangolo ove sia iscritto il cerchio, il semiperimetro è quanto il prodotto delle tangenti il cerchio da' tre vertici, diviso pel quadrato del raggio di questo*. E ciò conduce a determinare un tal raggio.

è quindi

$$s^2+t^2-u^2=\frac{(st-r^2)^2u^2}{r^4}-2st-u^2=\frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2stu^2}{r^2}-2st \qquad (3)$$

E similmente si avrebbero le altre equazioni

$$s^2+u^2-t^2= \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2st^2u}{r^2}-2su$$

$$t^2+u^2-s^2= \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2s^2tu}{r^2}-2tu$$

Premessi questi risultamenti trigonometrici, sieno ora X, Y, Z i centri de' tre cerchi iscritti nel triangolo con le condizioni proposte, e P, Q, R i punti di contatto co' lati AB, BC, CA; pongasi $AP=m$, $BQ=n$, $CR=p$, ed i raggi XP, YQ, ZR si dinotino per x, y, z respettivamente; risulterà $YN=2\sqrt{xy}$ [30];

---

[30] Pongasi la tangente comune de' cerchi de' centri X, Y, cioè la

$$PQ=NY=2\sqrt{xy}=T$$

l' altra de' cerchi de' centri Z, Y, cioè la

$$RQ' \ldots\ldots = 2\sqrt{yz}=T'$$

e la terza di quelli de' centri X, Z, cioè la

$$P'R' \ldots\ldots = 2\sqrt{zx}=T''$$

si otterranno, moltiplicandone due ad arbitrio, e dividendo per la terza, le tre equazioni

$$\frac{TT''}{T'}=2x \quad , \quad \frac{TT'}{T''}=2y \quad , \quad \frac{T'T''}{T}=2z$$

Cioè: *Il diametro di ciascuno de' tre cerchi da iscriversi, è quarto proporzionale in ordine alla tangente comune degli altri due cerchi, limitata tra' contatti, ed a quelle simili tra esso e ciascun di questi.*

E moltiplicando tutte tre quelle equazioni, o pur le poc' anzi ottenute, risulterà

$$TT'T''=8xyz$$

Cioè: *Il parallelepipedo di quelle tre tangenti è quanto quello de' tre diametri de' cerchi da iscriversi.*

e però $\quad 2\sqrt{xy} = s + t - m - n$
e similmente $\quad 2\sqrt{xz} = s + u - m - p$ } n. I.
e $\quad 2\sqrt{yz} = t + u - n - p$

Fin quì l'analisi del problema procede direttamente, ed è ora che il Malfatti supprimendone la continuazione, per occultarne il proseguimento stentato e prolisso, la trasmuta nel seguente teorema.

Dico che con supporre

$$2m = s + t + u - r + \sqrt{(r^2 + s^2)} - \sqrt{(r^2 + t^2)} - \sqrt{(r^2 + u^2)}$$
$$2n = s + t + u - r + \sqrt{(r^2 + t^2)} - \sqrt{(r^2 + s^2)} - \sqrt{(r^2 + u^2)}$$
$$2p = s + t + u - r + \sqrt{(r^2 + u^2)} - \sqrt{(r^2 + s^2)} - \sqrt{(r^2 + t^2)}$$

si verrà a soddisfare alle tre precedenti equazioni n.° I.

Per verificare con tali valori la prima di queste, si uniscano i valori di m ed n; risulterà

$$m + n = s + t + u - r - \sqrt{(r^2 + u^2)}$$

ed

$$s + t - m - n = r - u + \sqrt{(r^2 + u^2)}$$

e così pure si avrebbero

$$s + u - m - p = r - t + \sqrt{(r^2 + t^2)}$$
$$t + u - n - p = r - s + \sqrt{(r^2 + s^2)} \quad [31]$$

---

[31] Ponendo in una qualunque di queste tre equazioni, invece de' simboli, le rette che essi rappresentano, otterrassi immediatamente, e senza bisogno di altro apparecchio, la seguente geometrica conversione:

Nel triangolo ABC sieno iscritti tre cerchi che si tocchino tra loro, e ciascuno con due lati del triangolo; la tangente intermedia tra due contatti di questi cerchi con un lato del triangolo, sarà uguale al raggio del cerchio iscrittibile nel triangolo, insieme con la congiugnente il centro di questo col vertice dell' angolo opposto a quel lato, meno la tangente di un tal cerchio che gli corrisponde dal vertice stesso. E però, supposto essere C un tal vertice, se questa congiugnente CO si prolunghi fino ad incontrare la circonferenza del cerchio iscritto nel triangolo in C″, e descrivasi col centro C, intervallo CA′ l'arco circolare A′C‴, che interseghi CC″, in C‴; sarà C″C‴ uguale a PQ. E la stessa costruzione avrà luogo per le tangenti esterne RQ′, P′R′.

Il Malfatti passò per sopra a questo teorema, che presentavagli intuitivamente

Or ne' valori m ed n ponendo in luogo di $s+t+u$ l' equivalente $\frac{stu}{r^2}$, e fatto per economia di calcolo $\frac{stu}{r^2}-r=A$, $\sqrt{(r^2+s^2)}=S$, $\sqrt{(r^2+t^2)}=T$, $\sqrt{(r^2+u^2)}=V$, si avrà

$$2m = A - V + S - T$$
$$2n = A - V - (S - T)$$

Le quali equazioni moltiplicate l' una per l' altra, daranno

$$4mn = (A-V)^2 - (S-T)^2 = A^2 + V^2 - S^2 - T^2 - 2AV + 2ST$$

ove i primi quattro termini costituiscono la parte razionale dell' equazione, e gli altri due l' irrazionale.

Rimessi pertanto nella prima i valori di A, V, S, T, si otterrà

$$A^2 + V^2 - S^2 - T^2 = \frac{s^2t^2u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} - (s^2+t^2-u^2)$$
$$= \frac{s^2t^2u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r^2} - \frac{s^2t^2u^2}{r^4} + \frac{2stu^2}{r^2} + 2st$$
$$= \frac{st}{r^2}(-2ur + 2u^2 + 2r^2)$$

---

ciascuna di quelle tre sue equazioni, sebbene dal proseguimento del calcolo veggasi rigorosamente da lui dimostrato, mirando a giugnere allo scopo suo principale della costruzione elegantissima, ch' egli già teneva del problema in quistione.

Or ammessa un tal teorema, ecco in qual modo elegante potrà ottenersi la soluzione del problema del Malfatti.

Essendo $\overline{PQ}^2 = \overline{NY}^2 = \overline{XY}^2 - \overline{NX}^2 = \overline{PX+QY}^2 - \overline{PX-QY}^2 = 4PX \times QY$; e similmente $RQ'^2 = 4ZR \times YQ'$, sarà $\overline{PQ}^2 : \overline{Q'R}^2 :: PX$ a ZR: e ponendo per PQ e Q'R le loro uguali C'''C'' ed A'''A''; sarà $\overline{C'''C''}^2 : \overline{A'''A''}^2 :: PX : ZR$, e però sarà data la ragione di PX : RZ; ma è pur dato il loro rettangolo, come uguale al quadrato di $\frac{1}{2}$ B''B'''. Adunque saranno dati i raggi PX, ZR. Ed in modo analogo si determinerà anche quello YQ del terzo cerchio.

Rimettendo poi nella seconda, ossia nella parte irrazionale i valori A, V, S, T si ha

$$-\left(\frac{2stu}{r^2}-2r\right)\sqrt{r^2+u^2}+2\sqrt{r^2+s^2}\times\sqrt{r^2+t^2}$$

$$=\left(\frac{-2stu}{r^2}+2r\right)\sqrt{r^2+u^2}+2\,\frac{(st-r^2)\sqrt{r^2+u^2}}{r}$$

$$=\left(\frac{-2stu+2rts}{r^2}\right)\sqrt{r^2+u^2}$$

e quindi dall' equazione (A) si ricava

$$\frac{4r^2mn}{st}=-2ur+2u^2+2r^2+(-2u+2r)\sqrt{r^2+u^2}=(r-u+\sqrt{r^2+u^2})^2$$

Intanto si ha

A′C : C′O :: AP : PX
B′C : C′O :: BQ : QX
} E ne' simboli $s:r::m:x=\frac{rm}{s}$, $t:r::n:y=\frac{rn}{t}$

Si avrà dunque $4xy=\frac{4r^2mn}{st}$

E perciò $4xy=(r-u+\sqrt{r^2+u^2})^2$

D' onde $2\sqrt{xy}=r-u+\sqrt{r^2+u^2}=s+t-m-n$

E così prosegue a verificar le altre.

Tralasciamo di qui recar la costruzione semplicissima del problema, potendo ognuno ravvisarla da se medesimo, in conseguenza dell' analisi.

NUM. III.

Soluzione del problema precedente fatta da' compilatori degli *Annali delle Matematiche* (*indic. a pag.* 42).

Sieno A , B , C i vertici del triangolo dato , c , c', c'' i lati respettivamente opposti , X , Y , Z i centri de' cerchi opposti l' un l' altro a que' lati , ed r , r' , r'' esprimano i raggi rispettivi di questi cerchi : e sieno adottate le abbreviazioni seguenti :

$$c + c' + c'' = 2s \qquad \begin{aligned} s - c &= p \\ s - c' &= p' \\ s - c'' &= p'' \end{aligned}$$

$$R^2 s = p\,p'p'' \qquad \begin{aligned} c'c''p &= sd^2 \\ c\,c''p' &= sd'^2 \\ c\,c'p'' &= sd''^2 \end{aligned}$$

Sarà R il raggio del cerchio iscrittibile nel triangolo [31], d, d', d'' saranno le distanze rispettive del centro di questo da punti A , B , C , e p , p' , p'' , saranno le distanze rispettive de' medesimi punti da quelli di contatto di questo cerchio co' lati del triangolo , o ch' è lo stesso i raggi de' cerchi , che avendo per centri i punti A , B , C si toccherebbero due a due . Finalmente si dedurranno dalle equazioni quassù recate le relazioni seguenti

$$p + p' + p'' = s \qquad \begin{aligned} p'p''d^2 &= R^2c'c'' \\ p\,p''d'^2 &= R^2c\,c'' \\ p\,p'd''^2 &= R^2c\,c' \end{aligned}$$

[31] Ved. not. num. 29.

$$R\,cc'c'' = s\,d\,d'd'' \qquad \begin{aligned} p\ \ d'd'' &= R\,c\,d \\ p'\ \ d\,d'' &= Rc'd' \\ p''\ d\,d' &= Rc''d'' \end{aligned}$$

Ciò posto, sieno abbassate da X, Y, su c'' le perpendicolari $XP = r$, $YQ = r'$, ed unita XY si conduca per Y la YN parallela a c'', che incontri XP in N; sarà

$$YN = c'' - AP - BQ = \sqrt{(r+r')^2 - (r-r')^2} = 2\sqrt{rr'}.$$

Ma si ha

$$AP = r\ cot.\ \tfrac{1}{2}A = r\sqrt{\frac{ps}{p'p''}} = \frac{p}{R}\,r$$

$$BQ = r'\ cot.\ \tfrac{1}{2}B = r'\sqrt{\frac{p's}{pp''}} = \frac{p'}{R}\,r'$$

Sostituendo dunque si avrà

$$c'' - \frac{p}{R}\,r - \frac{p'}{R}\,r' = 2\sqrt{r\,r'}$$

Liberando da' denominatori, trasponendo, e formando le equazioni analoghe, verrà in fine

$$\begin{aligned} p\,r + 2R\sqrt{r\,r'} + p'\,r' &= R\,c'' \\ p\,r + 2R\sqrt{r\,r''} + p''r'' &= R\,c' \\ p'r' + 2R\sqrt{r'\,r''} + p''r'' &= R\,c \end{aligned}$$

che sono le equazioni al problema

Se pongasi $\quad r' = rx'^2 \qquad r'' = rx''^2$

queste tre equazioni diverranno

$$\begin{aligned} r(\,p \quad + \quad 2Rx' \quad + p'\,x'^2\,) &= R\,c'' \\ r(\,p \quad + \quad 2Rx'' \quad + p''x''^2) &= R\,c' \\ r\,(\,p'\,x'^2 + \quad 2Rx'\,x'' + p''x''^2) &= R\,c \end{aligned}$$

l'ultima dà
$$r = \frac{Rc}{p'x'^2 + 2R\,x'x'' + p''x''^2}$$

Sostituendo questo valore nelle due prime, e liberando da' denominatori, esse diverranno

$$(\mathrm{A}') \qquad c\,(p+2\mathrm{R}x'+p'x'^2) = c''(p'x'^2+2\mathrm{R}x'x''+p''x''^2)$$
$$(\mathrm{A}'') \qquad c\,(p+2\mathrm{R}x''+p''x''^2) = c'\,(p'x'^2+2\mathrm{R}x'x''+p''x''^2)$$

Non v' ha dunque altro a fare , che ricavare da queste due equazioni i valori di x' , x'' , per sostituirli in quello di r.

Se moltiplichisi l' equazione (A′) per $\frac{c'pp''}{s}$, e l' equazione (A″) per $\frac{c''pp'}{s}$, sviluppando tutte due , mettendo per $p\,p'p''$ il suo valore $\mathrm{R}^2 s$, ed osservando che si ha

$$s(c-c'') = c(s-c'') - c''(s-c) = c\,p''-c''p$$
$$s(c-c') = c(s-c') - c'(s-c) = c\,p'-c'p$$
$$\frac{c'c''p}{s} = d^2 \quad , \quad \frac{c\,c''p'}{s} = d'^2 \quad , \quad \frac{c\,c'p''}{s} = d''^2$$

esse diverranno

$$\Big(d(\mathrm{R}x'+p''x'')\Big)^2 - \Big(d''(\mathrm{R}x'+p)\Big)^2 = 0$$
$$\Big(d(\mathrm{R}x''+p'x')\Big)^2 - \Big((d'(\mathrm{R}x''+p)\Big)^2 = 0$$

e potranno esser messe sotto quest' altra forma

$$\Big(d\,(\mathrm{R}x'+p''x'')+d''(\mathrm{R}x'+p)\Big)\Big(d(\mathrm{R}x'+p''x'')-d''(\mathrm{R}x'+p)\Big) = 0$$
$$\Big(d\,(\mathrm{R}x''+p'x')+d'(\mathrm{R}x''+p)\Big)\Big(d(\mathrm{R}x''+p'x')-d'(\mathrm{R}x''+p')\Big) = 0$$

Combinando in tutte le maniere possibili un fattore della prima con uno della seconda , si otterranno quattro soluzioni del problema. Si può al più osservare , che la differenza tra i primi ed i secondi fattori si aggira solamente su i segni di d' , d'' .

Se dimandisi che i cerchi cercati si tocchino esteriormente, e sieno tutti e tre interiori al triangolo dato, si potrà togliere l' incertezza nella scelta dei fattori, per la considerazione di un caso particolare estrema-

mente semplice: questo è quello in cui gli angoli B, C sono tutti due retti[11]; si ha allora $R = p' = p'' = \frac{1}{2}c$, $d' = d'' = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$, $p = d = \infty$ ed $x' = x''$; in conseguenza le due equazioni divengono ugualmente

$$(2x' + \sqrt{2})\ (2x' - \sqrt{2}) = 0$$

e come in questo caso dee aversi evidentemente $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, risulta che sono allora i secondi fattori che bisogna prendere.

Rigettando dunque i primi fattori, si avrà per determinare x', x'' le due equazioni

$$d(Rx' + p''x'') = d''(Rx' + p)$$
$$d(Rx'' + p'x') = d'(Rx'' + p)$$

le quali danno

$$x' = p\,\frac{d''(d-d')R - p''dd'}{(d-d')(d-d'')R^2 - p'p''d^2} = \frac{1}{R}\,d''\,\frac{c''(d-d')}{c'c'' - (d-d')(d-d'')}$$

$$x'' = p\,\frac{d'(d-d'')R - p'dd''}{(d-d')(d-d'')R^2 - p'p''d^2} = \frac{1}{R}\,d'\,\frac{c' - (d-d'')}{c'c'' - (d-d')(d-d'')}$$

E ricordando che si ha

$$pp'd''^2 = R^2cc',\ pp''d'^2 = R^2cc'',\ pd'd'' = Rcd$$

---

[11] La presente supposizione non è già *un caso particolare estremamente semplice* del problema nel modo come è stato proposto; sarebbe al contrario questo un caso particolare di essa generalmente enunziata così: *date tre rette comunque in un piano; descrivere tre cerchi i quali si tocchino tra loro, e ciascuno tocchi ancor due di quelle tre rette*; ma allora la soluzione non doveva procedere partendo dalla natura del triangolo, come nel presente caso si è fatto. E la supposizione di sopra accennata sarebbe un peccato in Geometria, di quelli contro cui *merito reclamaret Euclides et tota Euclideorum schola*, alla quale, senza arrossirne, protestiamo rispetto ed addizione.

si conchiuderà

$$p'x'^2 = pc \frac{c'\left(c''-(d-d')\right)^2}{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2},$$

$$2Rx'x'' = pc \frac{2d\left(c''-(d-d')\right)\left(c'-(d-d'')\right)}{\left(c'c''-d(d-d')(d-d'')\right)^2}$$

$$p''x''^2 = pc \frac{c''\left(c'-(d-d'')\right)^2}{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2}.$$

Sostituendo finalmente nel valore trovato precedentemente per r, si avrà

$$r = \frac{R}{p} \frac{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2}{c'\left(c''-(d-d')\right)^2 + 2d\left(c''-(d-d')\right)\left(c'-(d-d'')\right) + c''\left(c'-(d-d'')\right)^2}$$

---

[34] L'espressione del raggio r ne' simboli del Gergonne, e secondo la soluzione del Malfatti è la seguente semplicissima

$$r = \frac{R}{2p}(s + d - R - d' - d'').$$

E questa sebbene debba essere identica alla qui sopra trovata, pure le si mostra incomunicante, come lo stesso Gergonne ha notato: il che dee attribuirsi al sistema di ricerca da costui adottato. Nè tampoco, dopo aver conosciuta questa, riescigli di avvertire il mezzo di ridurvela; che altrimenti la sua soluzione lo avrebbe condotto alla stessa elegante costruzione del Malfatti, nè egli avrebbe dovuto vedersi costretto a contentarsi di una soluzione aritmetica.

NUM. IV.

Verifica de' compilatori degli *Annali delle Matematiche* del teorema assunto dal Malfatti (*indic. a p.*43)

Prima di venire all' oggetto , bisogna stabilire tra i dati del problema delle equazioni di relazione proprie a semplificare il calcolo.

Si ha
$$\left.\begin{aligned} c + c' + c'' &= 2s \\ s - c' &= p' \\ s - c'' &= p'' \end{aligned}\right\} \text{Veggasi la loro soluzione}$$

sommando queste equazioni , e riducendo viene

$$c = p' + p''$$

d' onde $\quad c^2 \;\text{ o }\; c(s - p) = p'^2 + 2p'p'' + p''^2$

e moltiplicando per p , e ponendo per $p\,p'p''$ il suo valore $R^2 s$

$$psc = 2R^2 s + cp^2 + pp'^2 + pp''^2$$

Mettendo per s nel secondo membro il suo valore $c + p$, viene

$$psc = 2R^2 c + 2R^2 p + cp^2 + pp'^2 + pp''^2$$

Ma si ha

$$p^2 = d^2 - R^2 \quad , \quad p'^2 = d'^2 - R^2 \quad , \quad p''^2 = d''^2 - R^2$$

sostituendo dunque e riducendo verrà

$$psc = cR^2 + cd^2 + pd'^2 + pd''^2$$

ed aggiugnendo a quest' ultima equazione l' altra

$$o = 2Rcd - 2pd'd''$$

l' equazione risultante potrà esser posta sotto questa forma

$$psc = c(R + d)^2 + p(d' - d'')^2$$

Ponendovi per c il suo valore $s - p$, essa diverrà

$$p\Big(s^2 + (R + d)^2 - (d' - d'')^2\Big) = s\Big((R + d)^2 + p^2\Big)$$

Aggiugnendo a quest' equazione l' identica

$$-2ps(R+d) = -2sp(R+d)$$ [35]

l' equazione risultante potrà esser posta sotto questa forma

$$p\Big((s-R-d)^2-(d'-d'')^2\Big) = s(R+d-p)^2$$

E come in tutte queste formole si può a piacere commutare gli accenti , si avrà

$$(A) \qquad p\Big((s-R-d)^2-(d-d'')^2\Big) = s(R+d-p)^2$$

$$(A') \qquad p'\Big((s-R-d')^2-(d''-d)^2\Big) = s(R+d'-p')^2$$

$$(A'') \qquad p''\Big((s-R-d'')^2-(d-d')^2\Big) = s(R+d''-p'')^2$$

Ciò posto , si è veduto , che le equazioni del problema sono

$$(B) \qquad p'r'+2R\sqrt{r'r''}+p''r'' = Rc$$

$$(B') \qquad p''r''+2R\sqrt{r''r}+pr = Rc'$$

$$(B'') \qquad pr+2R\sqrt{rr'}+p'r' = Rc''$$

e si tratta provare che vi si soddisfa ponendo

$$(C) \qquad 2p'r = R(s-R+d-d'-d'')$$

$$(C') \qquad 2p'r' = R(s-R+d'-d''-d)$$

$$(C'') \qquad 2p''r'' = R(s-R+d''-d-d')$$

Per ciò sieno da prima sommate due a due le equazioni (C,C′,C″,) si avrà dividendo per 2

$$(D) \qquad p'r'+p''r'' = R(s-R-d)$$

$$(D') \qquad p''r''+pr = R(s-R-d')$$

$$(D'') \qquad pr+p'r' = R(s-R-d'')$$

---

[35] Protestiamo di non aver voluto per nulla alterare le espressioni ed i passaggi analitici de' compilatori , nelle loro cose , che da noi recansi .

Moltiplicando le stesse equazioni due a due verrà

$$(E) \quad 4p'p''r'r'' = R^2\left((s-R-d)^2 - (d'-d'')^2\right)$$
$$(E') \quad 4p''p\,r''r = R^2\left((s-R-d')^2 - (d''-d)^2\right)$$
$$(E'') \quad 4p\,p'\,r\,r' = R^2\left((s-R-d'')^2 - (d-d')^2\right)$$

Moltiplicando rispettivamente queste ultime equazioni per p, p', p'', e cangiando $p\,p'\,p''$ in R^2s, viene

$$(F) \quad 4R^2\,s\,r'\,r'' = R^2p\left((s-R-d)^2 - (d'-d'')^2\right)$$
$$(F') \quad 4R^2\,s\,r''r = R^2p'\left((s-R-d')^2 - (d''-d)^2\right)$$
$$(F'') \quad 4R^2\,s\,r\,r' = R^2p''\left((s-R-d'')^2 - (d-d')^2\right)$$

Comparandole con le equazioni (A , A′ , A″) , e dividendo per s , esse divengono

$$(G) \quad 4R^2r'r'' = R^2(R+d-p)^2$$
$$(G') \quad 4R^2r''r = R^2(R+d'-p')^2$$
$$(G'') \quad 4R^2r\,r' = R^2(R+d''-p'')^2$$

donde estraendo le radici si deducono le altre

$$(H) \quad 2R\sqrt{r'r''} = R(R+d-p)$$
$$(H') \quad 2R\sqrt{r''r} = R(R+d'-p')$$
$$(H'') \quad 2R\sqrt{r\,r'} = R(R+d''-p'')$$

le quali sommate respettivamente alle equazioni (D , D′ , D″) danno

$$p'r' + 2R\sqrt{r'r''} + p''r'' = R(s-p) = Rc$$
$$p''r'' + 2R\sqrt{r''r} + pr = R(s-p') = Rc'$$
$$pr + 2R\sqrt{rr'} + p'r' = R(s-p'') = Rc''$$

che sono le equazioni al problema.

NUM. V.

Ricerche del sig. Tédenat sulla soluzione del prof. Malfatti del problema de'tre cerchi da iscriversi in un triangolo (*indic. a pag.* 43.)

Secondo Malfatti, se R sia il raggio del cerchio iscritto nel triangolo, p, p', p'' le distanze de' suoi vertici da' punti ove questo cerchio tocca i suoi lati; d, d', d'' le distanze di questi stessi vertici dal centro di un tal cerchio; r, r', r'' i raggi de' tre cerchi iscritti, di maniera che ciascuno tocchi i due altri, e due lati del triangolo, dee aversi

$$\left.\begin{aligned} 2pr &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}+d-d'-d'') \\ 2p'r' &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}+d'-d''-d) \\ 2p''r'' &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}+d''-d-d') \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

sommando queste equazioni due a due, e supprimendo il fattore 2 nelle equazioni risultanti, viene

$$\left.\begin{aligned} pr+p'r' &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}-d'') \\ p'r'+p''r'' &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}-d) \\ p''r''+pr &= \mathrm{R}(s-\mathrm{R}-d') \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{B})$$

Ma c, c', c'' essendo i lati del triangolo, si han pure le equazioni

$$\left.\begin{aligned} pr+2\mathrm{R}\sqrt{rr'}+p'r' &= \mathrm{R}c'' \\ p'r'+2\mathrm{R}\sqrt{r'r''}+p''r'' &= \mathrm{R}c \\ p''r''+2\mathrm{R}\sqrt{r''r}+pr &= \mathrm{R}c' \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{C})\,[16].$$

[16] Vegg. il n. IV.

Sottraendo da ciascuna di queste la sua corrispondente tra le equazioni (B), dividendo per R i due membri delle equazioni risultanti, ricordando, che $s-c$, $s-c'$, $s-c''$ sono respettivamente eguali a p, p', p'', ottiensi

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{rr'} &= d''+R-p'' \\ 2\sqrt{r'r''} &= d+R-p \\ 2\sqrt{r''r} &= d'+R-p' \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

Ciò posto sieno ABC il triangolo di cui si tratta, O il centro del cerchio iscritto, A′, B′, C′ i punti di contatto di questo cerchio co' suoi lati, B′A‴C′, A′B‴C′, A′C‴B′ gli archi descritti da' vertici come centri, e con le loro rispettive distanze de' punti B′, C′, A′ per raggi. Sieno inoltre X, Y, Z, i centri de' cerchi i cui raggi rispettivi sono r, r', r''; e sieno P, P′; Q, Q′; R, R′ i punti di contatto di questi cerchi co' lati del triangolo. Sieno finalmente A″, B″, C″ i punti ove AO, BO, CO prolungate al di là del punto O incontrino la circonferenza del cerchio iscritto,

È stato già dimostrato, ed è facile assicurarsene immediatamente, che

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{rr'} &= PQ \\ 2\sqrt{r'r''} &= RQ' \\ 2\sqrt{r''r} &= P'R' \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Da un' altra parte è facile vedere, che

$$\left.\begin{aligned} d+R-p &= AO+OA''-AB' = A'''A'' \\ d'+R-p' &= BO+OB''-BA' = B'''B'' \\ d''+R-p'' &= CO+OC''-CA' = C'''C'' \end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Donde sègue , che le equazioni (D) riducansi a queste

$$\left.\begin{array}{l} PQ = C'''C'' \\ RQ' = A'''A'' \\ R'P' = B'''B'' \end{array}\right\} \quad (G)$$

le quali presentano un teorema rimarchevolissimo.

Poniamo per abbreviare

$$\left.\begin{array}{l} A'''A'' = d + R - p = a \\ B'''B'' = d' + R - p' = a' \\ C'''C'' = d'' + R - p'' = a'' \end{array}\right\} \text{d'onde} \left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{r'r'} = a \\ 2\sqrt{r''r} = a' \\ 2\sqrt{r\,r'} = a'' \end{array}\right\} \quad (H)$$

Prendendo il prodotto di queste ultime equazioni si ha

$$2r \,.\, 2r' \,.\, 2r'' = aa'a''$$

cioè : *Il parallelepipedo formato da' tre diametri de' tre cerchi cercati è uguale al parallelepipedo formato dalle tre note lunghezze RQ' , R'P' , PQ* [37] .

Se al contrario dividasi successivamente per ciascuna delle equazioni (H) il prodotto delle altre due , verrà

$$r = \frac{a'a''}{2a} \quad , \quad r' = \frac{a''a}{2a'} \quad , \quad r'' = \frac{aa'}{2a''} \qquad (K)$$

valori incomparabilmente più semplici , e forse altrettanto facili a costruirsi di qnelli del Malfatti ; poichè le lunghezze a , a' , a'' sono date immediatamente dalla costruzione della figura [38] .

---

[37] Una tal verità è perfettamente oziosa per la soluzione del problema in quistione .

[38] Tutto l' artifizio producente questa incomparabile semplicità consiste , in un' abbreviazione simbolica di somme e sottrazioni di quantità , che per l' effettiva costruzione bisognerebbe poi sempre eseguire ; e però senza il *forse* concediamo volentieri al sig. Tédenat , che esse sieno altrettanto facili a co-

Se suppongansi ammesse le equazioni (G), o ch' è lo stesso le equazioni (D); le equazioni (C) del problema diverranno le (B): e sottraendo successivamente ciascuna di queste ultime dalla somma delle altre due, se ne dedurranno le formole (A) del Malfatti. Quindi il problema non sarà per tal modo che di primo grado [39].

struirsi, che le espressioni del Malfatti. Solamente avremmo ragione di richiedergli, perchè tanto calcolo per ritornare a quello stesso, che noi abbiamo mostrato rilevarsi evidentemente dalle formole del Malfatti, dalle quali egli parte per pervenire a queste altre da lui adottate. Sicchè a noi pare che le sue ricerche nulla abbiano aggiunto, che potesse contribuire ad una diretta soluzione del problema: nè il teorema compreso in queste formole, e da noi enunciato nella nota 32 alla soluzione del Malfatti può considerarsi altrimenti, che come una trasformazione della quistione proposta in altra egualmente difficile: nè esso pur dovrebbesi al sig. Tédenat attribuire, ritrovandosi simbolicamente con chiarezza espresso nella soluzione del Malfatti, e dal medesimo dimostrato.

[39] Mi spiace doverlo dire, che questa conseguenza, che spesso trovo ripetula nelle soluzioni di problemi geometrici eseguite con l' analisi algebrica pura, sia affatto erronea, e mostri quanto poco siesi, da coloro che così ragionano meditato sulla natura de' problemi, ch' è indestruttibile dalle algebriche evoluzioni. Il problema è di secondo grado, e tale il dimostra nelle formole del Malfatti il radicale quadratico che vi è compreso; tale le soluzioni geometriche di esso date: nè certamente la sua natura vien distrutta dall' arbitrio dell' analista, che vi considera per queste un solo segno, e ne elude la forma radicale per mezzo di algebriche trasformazioni. Secondo costoro sarebbe più ragionevole disprezzare le radici immaginarie; e però il problema della duplicazione del cubo risulterebbe del primo grado: ed essi avrebbero per tal modo fatta finalmente la causa de' *duplicatori*. E ricordiamo ancora ad essi, che il Newton, nel ridurre la costruzione del problema del cerchio che ne toccasse tre altri, all' intersezione di due rette, non però disse, che tal problema erasi abbassato al primo grado; ed il nostro Fergola, ch' era saggio ed avveduto, pria di esibire le soluzioni di un gran numero di problemi solidi, ipersolidi, e trascendenti a guisa di *piani*, mostrando col fatto il convenevole uso, che può farsi de' luoghi alla linea ed alla superficie

Si vede dunque quanto la soluzione di questo problema diverrebbe facile, se si potesse dimostrare a priori, che le rette $A'''A''$, $B'''B''$, $C'''C''$ sieno respettivamente uguali alle rette RQ', $R'P'$, PQ, o semplicemente che $RQ' = A'''A''$; ed è in questo punto capitale che io ho creduto dover richiamare l' attenzione de' vostri lettori [40].

Si potrebbe pervenire ad assicurarsi dell' esattezza de' valori, che ho assegnati ad r, r', r'', ponendo

$$2\sqrt{r r'} = \lambda'' (R + d'' - p'')$$
$$2\sqrt{r' r''} = \lambda \ (R + d - p)$$
$$2\sqrt{r'' r} = \lambda' \ (R + d - p')$$

e provando con la sostituzione nelle equazioni del problema, che debbasi avere $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$. Ma oltre che questa verità non può rendersi evidente che con un calcolo assai prolisso, rimarrebbe sempre a sapere ciò che ha potuto condurre a stabilire le equazioni di quì sopra, in modo che non farebbe che riprodurre, sotto altra forma la stessa verifica da voi presentata nella vostra raccolta.

Io non aggiungerò, che una parola: dopo i valori quì sopra assegnati ad r, r', r'', si ha

$$\frac{r'}{r} = \frac{a^2}{a'^2}, \quad \frac{r''}{r} = \frac{a^2}{a''^2},$$

ma nella vostra verifica avete fatto

$$r' = rx'^2 \quad , \; r'' = rx''^2$$

---

in elegantemente risolverli, manifestamente si espresse dicendo, che que' problemi *nulla perdendo di lor natura*, *risolcevansi a guisa di problemi piani*. (Veg. l' introduzione all' *opusc. IX. della Raccolta di sua Scuola*).

[40] Il sig. Tédenat dirigeva, come si è detto, queste sue ricerche a' compilatori degli *Annali delle Matematiche*.

d' onde

$$\frac{r'}{r} = x' , \quad \frac{r''}{r} = x''$$

dunque

$$x' = \frac{a}{a'} = \frac{R + d - p}{R + d' - p'} , \quad x'' = \frac{a}{a''} = \frac{R + d - p}{R + d'' - p''}$$

ciò che dà

$$\frac{x'}{x''} = \frac{R + d'' - p''}{R + d' - p'}$$

Ma in vista de' valori che voi avete trovati per x', x'' nel luogo accennato, si ha

$$\frac{x'}{x''} = \frac{d''}{d'} \times \frac{c'' - d + d'}{c' - d + d''}$$

dunque

$$d'(c' - d + d'')(R + d'' + p'') = d''(c'' - d + d')(R + d' - p')$$

E permutando convenevolmente gli apici, si avran dunque fra i dati del problema le relazioni seguenti

$$d\ (c - d'' + d')(R + d' - p') = d'(c' - d'' + d)(R + d - p)$$

$$d'\ (c'' - d' + d'')(R + d'' - p'') = d''(c'' - d + d')(R + d' - p')$$

$$d''\ (c'' - d' + d)(R + d - p) = d\ (c - d' + d'')(R + d' - p'')$$

relazioni, che debbono esser facili a verificare.

NUM. VI.

Ricerche sullo stesso problema del prof. Lechmütz di Berlino (*indic. a pag.* 44.)

Sieno A, B, C i tre vertici di un triangolo qualunque, sia O il centro del cerchio iscritto, il cui raggio noi prendiamo per unità.

Da questo centro sieno abbassate respettivamente su i lati BC, CA, AB le perpendicolari $OA' = OB' = OC' = 1$, e sieno di più menate dall' istesso punto a' vertici le rette OA, OB, OC.

Si facciano

$$ang.\, AOB' = ang.\, AOC' = \alpha$$
$$ang.\, BOC' = ang.\, BOA' = \beta$$
$$ang.\, COA' = ang.\, COB' = \gamma$$

Avremo

$$AB' = AC' = tang.\alpha \quad , \quad OA = sec.\, \alpha$$
$$BC' = BA' = tang.\beta \quad , \quad OB = sec.\, \beta$$
$$CA' = CB' = tang.\gamma \quad , \quad OC = sec.\, \gamma$$

Di più, poichè $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ equivale a 4 angoli retti avremo

$$tang.\gamma = -\, tang.(\alpha + \beta) = -\frac{tang.\, \alpha + tang.\beta}{1 - tang.\, \alpha\; tang.\beta}$$

e liberando dal denominatore, ed ordinando

$$tang.\alpha + tang.\beta + tang.\gamma = tang.\alpha . tang.\beta .\; tang.\gamma .$$

Trattandosi dunque d' iscrivere in un triangolo tre cerchi tali, che ciascun di essi tocchi i due altri, ed i lati del triangolo, è chiaro, che i centri di questi cerchi dovranno trovarsi sulle rette OA, OB, OC, che bisecano i suoi angoli. Sieno respettivamente X, Y, Z questi centri, ed x, y, z i raggi, che vi corrispondono.

Se projettinsi ortogonalmente i centri X, Y sul lato AB =

$AC' + BC' = tang.\alpha + tang.\beta$, le loro projezioni divideranno questo lato in tre segmenti ; di cui gli estremi saranno evidentemente $x\, tang.\alpha$, $y\, tang.\beta$. Quanto al segmento medio, egli non sarà altra cosa che la projezione della distanza de' centri $XY = x + y$, e sarà conseguentemente

$$\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$$

Eguagliando dunque la somma di queste tre parti alla prima espressione del lato AB, si avrà

$$x\, tang.\alpha + 2\sqrt{xy} + y\, tang.\beta = tang.\alpha + tang.\beta$$

La considerazione de' due altri lati darà equazioni analoghe ; di tal che, facendo per brevità

$$tang.\alpha = a$$
$$tang.\beta = b$$
$$tang.\gamma = c$$

tutto si troverà ridotto a risolvere rapporto ad x, y, le tre equazioni

$$ax + 2\sqrt{xy} + by = a + b \qquad (1)$$
$$by + 2\sqrt{yz} + cz = b + c \qquad (2)$$
$$cz + 2\sqrt{zx} + ax = c + a \qquad (3)$$

colla condizione

$$a + b + c = abc \qquad (4)$$

Moltiplicando in croce le equazioni (2, 3), e riducendo, si ha

$$(b+c)(ax + 2\sqrt{xz}) - (a+c)(by + 2\sqrt{yz}) = c(a-b)z$$

ma l' equazione (4) dà

$$c = -\frac{a+b}{ab-1}$$

d' onde si ha

$$b+c=\frac{a(1+b^2)}{ab-1}\quad,\quad a+c=\frac{b(1+a^2)}{ab-1}$$

Sostituendo dunque, e sopprimendo il denominatore comune, si avrà

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xz})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=(a^2-b^2)z$$

ovvero

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xy})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=\Big((1+a^2)-(1+b^2)\Big)z$$

o trasponendo i termini

$$(1+b^2)(a^2x+2a\sqrt{xz}+z)=(1+a^2)(b^2y+2b\sqrt{yz}+z)$$

oppure

$$(1+b^2)(a\sqrt{x}+\sqrt{z})^2=(1+a^2)(b\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$

o estraendo le radici, e dividendo

$$\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+b^2}}$$

Non diamo doppio segno al secondo membro di quest' equazione, poichè abbiamo semplicemente in mira, che i cerchi interiori al triangolo si tocchino esternamente.

Con una semplice permutazione di lettere, si dedurrà

$$\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{c\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\frac{c\sqrt{z}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+a^2}}$$

Sommando queste due ultime, membro con membro, svanirà z, e si avrà

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)\sqrt{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)\sqrt{y}$$

ma a causa di

$$c=\frac{a+b}{ab-1}$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{ab-1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$$

sostituendo dunque, e togliendo i denominatori, si avrà

$$\left(1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}\right)\sqrt{x}=\left(1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}\right)\sqrt{y}$$

I coefficienti dei due membri possono inoltre scriversi a questo modo

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})+a\,(1-b-\sqrt{1+b^2})$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})+b\,(1-a-\sqrt{1+a^2})$$

e considerando che

$$a=\frac{1}{2}\cdot 2a=-\frac{1}{2}\Big((1-a)^2-(1+a^2)\Big)=-\frac{1}{2}(1-a+\sqrt{1+a^2})(1-a-\sqrt{1+a^2})$$

$$b=\frac{1}{2}\cdot 2b=-\frac{1}{2}\Big((1-b)^2-(1+b^2)\Big)=-\frac{1}{2}(1-b+\sqrt{1+b^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})$$

essi prenderanno questa nuova forma

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\left(1-\frac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\right)$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})\left(1-\frac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\right)$$

cioè a dire, ch' essi hanno un fattor comune; sopprimendo dunque questo fattore, l' equazione diverrà semplicemente

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\sqrt{x}=\left(1-b+\sqrt{1+b^2}\right)\sqrt{y}$$

mettendo dunque per brevità

$$1 - a + \sqrt{1 + a^2} = A$$
$$1 - b + \sqrt{1 + b^2} = B$$
$$1 - c + \sqrt{1 + c^2} = C$$

si dedurrà , con una semplice permutazione di lettere

$$B\sqrt{y} = C\sqrt{z} \quad , \quad C\sqrt{z} = A\sqrt{x}$$

d' onde

$$\sqrt{x} = \frac{C}{A}\sqrt{z} \quad , \quad \sqrt{y} = \frac{C}{B}\sqrt{z} \qquad (5)$$

Ritorniamo ora alle nostre equazioni primitive ; se dalla somma delle equazioni (2 , 3) ne toglieremo l' equazione (1) , essa diverrà

$$cz + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} - \sqrt{xy} = c$$

E mettendo in questa per $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ i loro valori (5) , si avrà

$$\left(c + \frac{C}{A} + \frac{C}{B} - \frac{C^2}{AB}\right)z = c$$

ovvero

$$\Big(cAB + C\,(A + B - C)\Big)z = c\,AB \qquad (6)$$

Or si ha dai valori di A , B , C

$$cAB = c\,(1-a)(1-b) + c(1-b)\sqrt{c+a^2} + c\,(1-a)\sqrt{1+b^2} + c\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

ovvero rimpiazzando $\sqrt{(1 + a^2)\,(1 + b^2)}$ pe'l suo eguale $(ab-1)\sqrt{1 + c^2}$

$$cAB = c(1-a)\,(1-b) + c(1-b)\sqrt{1+a^2} + c(1-a)\sqrt{1+b^2} + c(ab-1)\sqrt{1+c^2}$$

Si avrà

$$A + B - C = 1 - a - b + c + \sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} - \sqrt{1 + c^2}$$

d' onde, moltiplicando per $C = 1 - c + \sqrt{1 + c^2}$, e rimpiazzando

respettivamente $\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}$, e $\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}$ per $(ac-1)\sqrt{1+b^2}$, e $(bc-1)\sqrt{1+a^2}$

$$C(A+B-C) = -(1-c)(a+b) - 2c^2 - c(1-b)\sqrt{1+a^2}$$
$$-(a+b-2c)\sqrt{1+c^2} - c(1-a)\sqrt{1+b^2}$$

Dunque sommando, e riducendo

$$cAB + C(A+B-C) = c-a-b+abc-2c^2+(c-a-b+abc)\sqrt{1+c^2}$$

e rimpiazzando per abc il suo equivalente $a+b+c$ si avrà

$$cAB + C(A+B-C) = 2c(1-c+\sqrt{1+c^2}) = 2cC$$

Sostituendo dunque questo valore nell' equazione (6) e sopprimendo il fattore c, essa diverrà

$$2Cz = AB$$

E da una semplice permutazione di lettere, si avrà

$$x = \frac{BC}{2A}\quad,\quad y = \frac{CA}{2B}\quad,\quad z = \frac{AB}{2C}$$

Ciò posto sieno prolungate AO, BO, CO, sinchè incontrino di nuovo la circonferenza del cerchio iscritto in A″, B″, C″, poi da' vertici A, B, C, presi respettivamente per centri, e co' raggi AB′ = AC′, BC′ = BA′, CA′ = CB′ sieno descritti gli archi, che taglino respettivamente AO, BO, CO in A‴, B‴, C‴; avremo così

$$A'''A'' = AO + OA'' - AB' = OA'' - AB' + AO = 1 - \text{tang.}\alpha + \text{sec.}\alpha = A.$$
$$B'''B'' = BO + OB'' - BC' = OB'' - BC' + BO = 1 - \text{tang.}\beta + \text{sec.}\beta = B$$
$$C'''C'' = CO + OC'' - CA' = OC'' - CA' + CO = 1 - \text{tang.}\gamma + \text{sec.}\gamma = C$$

fig. 2. Le tre lunghezze A, B, C essendo così determinate, se ne potrà conchiudere, per una costruzione unica, i tre raggi cercati, x, y, z. Per ciò si costruirà un triangolo DEF, i cui tre lati EF, FD, DE sieno respettivamente uguali a queste tre lunghezze;

pe' vertici D , E , F si tirino le rette terminate a' lati opposti in D′ , E′ , F′ , e così dirette , che abbiasi

$$ang.\ \mathrm{FDD'} = ang.\ \mathrm{E}$$
$$ang.\ \mathrm{DEE'} = ang.\ \mathrm{F}$$
$$ang.\ \mathrm{EFF'} = ang.\ \mathrm{D}$$

allora in virtù della proporzionalità de' lati omologhi de' triangoli simili , le lunghezze DD′ , EE′ , FF′ saranno i diametri de' cerchi cercati , aventi respettivamente i loro centri in X , Y , Z .

Trovate una volta queste espressioni de' raggi de' cerchi , non v' ha cosa più facile , che di sostituirle tali altre incognite quale si vorrà . Prendendo , per esempio , per incognite le distanze de' vertici ne' quali i cerchi cercati toccano i lati del triangolo , queste incognite saranno $x\ tang.\alpha = ax$, $y\ tang.\beta = by$, $z\ tang.\gamma = cx$, e si avrà

$$ax = \frac{aBC}{2A} \quad , \quad by = \frac{bCA}{2B} \quad , \quad cz = \frac{cAB}{2C}$$

Or dietro i valori trovati quì sopra per cAB , e $C(A+B-C)$ si ha

$$cAB = C\left((2c - A + B - C)\right)$$

dunque

$$cz = \frac{cAB}{2C} = \frac{1}{2}\left(2c - (A + B - C)\right)$$

cioè a dire

$$cz = \frac{1}{2}\left(a + b + c - 1 + \sqrt{(1 + c^2)} - \sqrt{(1 + a^2)} - \sqrt{(1 + b^2)}\right)$$

o pure

$$cz = \frac{1}{2}\left(\mathrm{AB'} + \mathrm{BC'} - \mathrm{CA'} - \mathrm{OC'} + \mathrm{OC} - \mathrm{OA} - \mathrm{OB}\right)$$

il che dà esattamente la costruzione del Malfatti.

Se si volesse prendere per incognite le distanze AX, BY, CZ de' vertici a' centri corrispondenti, queste incognite sarebbero respettivamente $x\sqrt{1+a^2}$, $y\sqrt{1+b^2}$, $z\sqrt{1+c^2}$, e si troverebbe, dietro ciò che precede,

$$z\sqrt{1+c^2}=cz\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}\left(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right)$$

Se finalmente si volesse prendere per incognite le distanze OX, OY, OZ, queste incognite sarebbero respettivamente $(1-x)\sqrt{1+a^2}$, $(1-y)\sqrt{1+b^2}$, $(1-z)\sqrt{1+c^2}$, e si troverebbe, per esempio,

$$(1-z)\sqrt{1+c^2}=(c-cz)\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}\left(1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}\right)$$ [41]

---

[41] Nell' opuscolo, in risposta al programma, non guari di tempo pubblicato, a forze riunite, da diversi nostri professori, nel riportarvisi come da essi rilevate le equazioni, che sopra si sono vedute assegnate dal Lechmütz, per la costruzione da esso esibita, male interpetrando, per imperizia ne' metodi, la riduzione che fa di quelle in altre questo distinto analista, nel caso che le incognite del problema siensi in diverso modo stabilite, si è con franchezza puerile asserito: » Siccome le equazioni da noi assegnate ci danno per mezzo di formole molte » semplici i valori di tutte le quantità che si cercano, possiamo dire che qualun- » que soluzione si darà mai del presente problema, si potrà sempre facilmente » dalle nostre equazioni ricavare. Questa proposizione che qualcuno poco ver- » sato ne' metodi algebrici potrebbe creder troppo ardita, sarà diversamente » giudicata da coloro che, esercitati nelle soluzioni algebriche de' problemi geo- » metrici, conoscono pur troppo, *quali e quante conseguenze possansi dedurre* » *dalle equazioni di un problema*.

Or noi confessando d' intender poco questa loro conchiusione di parole, concediamo volentieri, che da una soluzione algebrica si possa passare ad un'altra,

Variando i segni de' radicali in modo convenevole, e sostituendo al cerchio iscritto propriamente detto ciascuno de' tre altri cerchi, che possono toccare ad un tratto i tre lati del triangolo, si otterranno tutte le soluzioni delle quali il problema può essere suscettivo.

---

stabilendosi diversamente l' incognita, mediante il rapporto geometrico che vi ha tra queste; del che non crediamo che mai alcuno avesse potuto dubitare: ma pure desideremmo, che essi ponessero in opera il loro genio analitico, in mostrare, come si possa ridurre *facilmente* a quelle equazioni la costruzione, che ora gli esibiremo del Paucker, o l'altra che n' è stata presentata alla nostra Reale Accademia, col motto *Ordinis haec virtus erit*; e che a quest' ora non potrà ad essi essere ignota, trovandosi andar in giro tra socj della classe matematica, tra' quali non mancano loro fautori.

NUM. VII.

Soluzione dello stesso problema del Malfatti, eseguita con l' analisi antica dal distinto geometra sig. Paucker, professore nel ginnasio di Mittau in Curlandia, ed inserita nel tom. I. delle *Memorie presentate all' imperiale accademia di Pietroburgo*, an. 1831 (*indic. a pag.* 45.)

Per non essere infiniti, recheremo solamente la costruzione alla quale un' analisi geometrica ben lunga ha guidato il Paucker nello scioglimento del presente problema; ed indi soggiugneremo l' enunciazione di tutti que' nuovi teoremi che da tale analisi sono derivati, o che egli poi reca, per compiere la composizione del problema.

COSTRUZIONE.

Divisi per metà i tre angoli del dato triangolo, tali secanti concorreranno in uno stesso punto M centro del cerchio iscrittibile nel triangolo; poi ne' triangoli risultanti M*bc*, M*ca*, M*cb* iscrivansi i cerchi D, E, F respettivamente, e sieno *o*, *p*, *q* i contatti di questi cerchi co' lati *bc*, *ca*, *ab*; ed *u*, *v*, *w* le intersezioni delle linee de' centri EF, FD, DE con le secanti M*a*, M*b*, M*c* respettivamente. Uniscansi le rette *ou*, *pv*, *qw*, che concorreranno in un medesimo punto N', e delle quali ciascuna dee toccare i due adjacenti tra i tre cerchi D, E, F. I quadrilateri N*paq*, N*qbo*, N*ocp*, saranno circoscrittibili a de' cerchi. Vi s' iscrivano i cerchi *d*, *e*, *f* respettivamente; questi soddisferanno al problema, cioè saranno tangenti due a due.

Teoremi sviluppati dal sig. Paucker, nel cammino dell' analisi geometrica della sua soluzione.

Supposto fatto quello che cercasi, ne segue, che:

TEOREMA I.

1. *Ciascuna delle tangenti esteriori a due cerchi*, p. e., *kg' è media proporzionale tra i loro diametri kt, g'r.* *fig. 4.*

2. *Ciascuna delle tre tangenti interiori a' cerchi medesimi*, p. e, *mp, è media proporzionale tra i loro raggi dm, fm.*

TEOREMA II.

Se di due cerchi, p.e., *e, f si uniscano i contatti sul lato corrispondente bc, con i contatti sulla circonferenza d; l' intersezione w di queste due rette k' m, hn dovrà trovarsi sulla circonferenza d: siccome l' intersezione x delle rette kl, g'n si troverà sulla circonferenza e — I raggi inoltre dw, ex corrispondenti a quelle intersezioni taglieranno prolungati, ad angolo retto, i lati bc, ca respettivamente.*

TEOREMA III.

La retta wl, che unisce l' intersezione w col contatto l, sarà tangente a' due cerchi f, e, ossia perpendicolare alla retta de' centri fe; e dividerà in due parti uguali nel punto o la tangente esteriore k'h.

Così pure xm, congiungente dell' intersezione x col contatto m, sarà tangente a' due cerchi f, d, ossia perpendicola-

re alla retta de' centri fd, e bisecherà nel punto p la tangente esteriore kg'.

Teorema IV.

La retta wl tangente comune de' cerchi f, e sarà uguale alla wu, distanza perpendicolare del punto w dalla corda de' contatti k'k, siccome xm tangente comune a' cerchi f, d sarà uguale alla xv, distanza perpendicolare del punto x dalla corda de' contatti k'k.

Teorema V.

Si congiunga vl, si distenda fino ad incontrare la wu nel punto y, e si tirino le ky, ul; queste due rette dovranno intersegarsi sulla circonferenza del cerchio f, in un punto γ, cui corrisponde il raggio fγ parallelo alla corda de' contatti k'k.

Così pure le vm, k'z s' intersegheranno sulla circonferenza del cerchio f, in un punto δ, al quale corrisponde il raggio fδ parallelo alla corda de' contatti k'k.

E quindi i raggi fγ, fδ formeranno una linea retta parallela alla corda stessa.

Teorema VI.

I triangoli kg'y, k'hz saranno isosceli, e le linee ky, k'z formeranno co' lati ac, bc angoli uguali tra loro, ed uguali alla quarta parte dell' angolo bca.

Teorema VII.

Il raggio fl si distenda in ι, fino alla corda de' contatti kk' e si congiunga ιw, che interseghi la retta ky in un punto η. — Il quadrilatero $klyu$ sarà inscrittibile nel cerchio, il cui centro sarà η: e prolungando la tangente wl comune a' due cerchi f, e, fino ad incontrare nel punto λ il lato ca, questo punto λ starà per dritto col punto η, e col centro del cerchio f. E la retta $f\eta\lambda$, che passa per essi, sarà perpendicolare alla corda de' contatti kl.

Così pure staranno in linea retta il centro del cerchio f, il centro $\mathfrak{z}$ del cerchio circoscrittibile al quadrilatero $k'mz\nu$, che trovasi sulla $k'z$, e l' intersezione μ della tangente μx comune a' due cerchi f, d, col lato bc; e la retta $f\mathfrak{z}\mu$, che passa per essi sarà perpendicolare alla corda de' conatti $k'm$.

Inoltre la retta νm, prolungata, dovrà passare pel punto η centro del cerchio circoscrittibile al quadrilatero $kl\gamma u$, e del pari la retta ul passerà pel punto $\mathfrak{z}$ centro del cerchio circoscrittibile all' altro quadrilatero $k'mz\nu$.

Teorema VIII.

Conducasi pel vertice c la parallela alla retta ky, la quale incontri la $f\lambda$ in E. Il punto E sarà centro di un cerchio del raggio Ep tangente le rette λlo, cf, ca, e quest' ultima in p.

E così pure, conducendo pel vertice c la parallela alla $k'z$, essa incontrerà la retta $f\mu$ nel punto D, che sarà centro di un cerchio del raggio Do tangente le rette μmp, cf, bc, e quest' ultima in o.

Teorema IX.

Il cerchio descritto col centro E, e col raggio Ep, toccherà le quattro rette nq, lo, cf, ca, prolungate.

Altri teoremi di cui il Paucker ha bisogno per compiere la composizione del problema, cioè per dimostrare la costruzione esposta di esso.

Teorema I.

fig. 5. *Sia l' angolo bca diviso in due parti uguali dalla Mc, e de' cerchi tangenti D, E sieno comunque iscritti negli angoli bcM, Mca; se uniscansi i contatti su' lati colla retta op, che interseghi que' cerchi in x, y; le corde ox, py saranno uguali tra loro.*

Teorema II.

Poste le cose stesse del teorema precedente, sieno inoltre o'', p' i contatti di que' cerchi con la segante cM, ed uniscansi i contatti reciproci colle rette op', po''; queste congiungenti saranno uguali tra loro, e concorreranno ad uno stesso punto z della congiungente de' centri DE, il qual punto è la projezione del vertice c su tale congiungente.

Di più, que' cerchi D, E essendo intersegati dalla retta op', ne' punti t, y', e dalla po'' in x', t' respettivamente; la congiungente tt' sarà la loro comune tangente interiore; e le quattro corde ot, p'y', o''x', pt' saranno uguali tra loro.

Teorema III.

Poste le cose stesse del teorema I.; le due tangenti or, p s', tirate da ciascun contatto al cerchio opposto, saranno uguali tra loro.

Teorema IV.

Premesse le cose stesse del teorema II.; il quadrato di ciascuna delle due tangenti or, p s', tirate dall' un de' contatti al cerchio opposto, sarà uguale al doppio rettangolo delle corde tra' contatti o o'', pp', insieme col quadrato di tt', ovvero di p', o'', tangenti comuni interne de' cerchi D, E.

Teorema V.

Poste le cose stesse del teorema II.; il doppio quadrato della congiungente de' contatti reciproci o p', ovvero p o'', sarà uguale alla somma de' quadrati fatti dalla tangente o r, o p s' condotta da un contatto al cerchio opposto, e dalla comune tangente interiore o''p' de' cerchi.

Teorema VI.

Poste le cose stesse del teorema II., si tirino a' cerchi opposti, e nell' istesso senso rispetto a' centri, le tangenti o r, p s', che si taglino scambievolmente in N; il quadrilatero N o c p sarà circoscrittibile ad un cerchio f tale, che la doppia distanza del vertice dell' angolo c da' punti di contatto di questo cerchio su i lati dell' angolo b c a, è eguale alla somma delle tangenti o c, c p diminuita della tangente o r, ovvero p s'.

TEOREMA VII.

Posto ciò, che si è detto nel teorema precedente, sia k il punto ove il cerchio f iscritto nel quadrilatero N o c p tocca il lato c a: se dal vertice c, e nell' istesso senso del lato c a, si prenda un segmento c G uguale alla somma delle tangenti, o c, c p; il rettangolo di c f in G k sarà uguale all' altro delle tangenti, oc, c p.

TEOREMA VIII.

Premesse le cose stesse del teorema I., da' contatti o, p sieno menate a' cerchi opposti, e nell' istesso senso per rapporto a' centri, le tangenti o r, p s', che s' interseghino scambievolmente in N; nel quadrilatero N o c p sia iscritto il cerchio f, tangente i lati N o, o c, cp, p N, ne' punti l, k', k, m, respettivamente: dico che

1°. *Delle due tangenti l o, m p, quella, che è la più grande sarà uguale alla semisomma delle tangenti o r, o'' p', e l'altra alla semidifferenza delle tangenti medesime.*

2°. *Il rettangolo di queste tangenti l o, m p sarà uguale alla metà del rettangolo delle corde di contingenza o o'', p p'.*

3°. *La somma de' quadrati delle stesse tangenti l o, mp sarà uguale al quadrato della retta o p', ovvero p o'', che congiunge i contatti reciproci*

4°. *Se da' contatti con la segante M c si abbassino le perpendicolari p' ε, o'' ζ su' lati; il segmento k p sarà diviso in ε nella stessa ragione che la tangente c o in k', e 'l segmento k' o sarà diviso in ζ, com' è divisa la c p in k.*

5. *Finalmente la comune tangente interiore t t' a' cerchi D, E passerà per l' intersezione N delle tangenti o r, p s'.*

Teorema IX.

Premesse le stesse cose del teor. II.; la distanza de' contatti $o''p'$ sarà divisa armonicamente nel vertice c, e dalla linea de' centri DE; di tal che se w sia l'intersezione della linea de' centri colla segante Mc, la distanza cw sarà la media armonica tra le tangenti oc, cp.

E ciò *vuol dire, che la media proporzionale tra le tangenti oc, cp è anche media proporzionale tra le medie armoniche, ed aritmetiche di queste tangenti oc, cp.*

Teorema X.

Nel triangolo abc sia iscritto il cerchio M, che tocchi i lati bc, ca, ab in A, B, C respettivamente; ed i cerchi D, E, F sieno iscritti ne' triangoli Mbc, Mca, Mab, tal che il cerchio D sia tangente alle bc, Mb, Mc ne' punti, o, o', o''; il cerchio E tocchi ca, Mc, Ma, in p, p', p'', il cerchio F tocchi ab, Ma, Mb in q, q', q''. fig. 3.

Ciò posto, la tangente menata dal punto o al cerchio E, o dal punto p al cerchio D, sarà uguale ad xq', ovvero ad yq''. La tangente menata dal punto p al cerchio F, o dal punto q al cerchio E, sarà uguale ad yo', o a zo''. E la tangente menata dal punto o al cerchio F, sarà uguale a zp' ovvero ad xp''.

Teorema XI.

Nel triangolo abc sia iscritto il cerchio M, e ne' triangoli Mbc, Mca, Mab sieno pure iscritti i cerchi D, E, F,

le di cui linee de' centri EF, FD, DE taglino le seganti M a, M b, M c in u, v, w se uniscansi le rette ou, pv, qw, ciascuna di queste sarà tangente a' due cerchi adjacenti tra i tre D, E, F.

Permesse questa verità geometriche, ecco la

Dimostrazione della costruzione esibita *a pag.* 88.

fig. 3. Si son divisi in due parti uguali gli angoli del triangolo abc con le seganti M a, M b, M c, e ne' triangoli M bc, M ca, M ab si sono iscritti i cerchi D, E, F, tangenti i lati bc, ca, ab ne' punti o, p, q; le linee de' centri EF, FD, DE essendo tagliate dalle seganti M a, M b, M c in u, v, w, si son congiunte le rette ou, pv, qw.

Ciò posto, il teorema precedente fa conoscere, che la retta ou debba esser tangente a' cerchi E, F, la retta pv a' cerchi F, D, e la retta qw a' cerchi D, E.

Quindi, poichè le rette ou, pv son tangenti a' cerchi E, D respettivamente, e qw è la comune tangente interiore di questi cerchi, si rileverà dal teorema VIII., che qw debba passare per l' intersezione delle ou, pv; e che per conseguenza le tre rette ou, pv, qw debbano intersegarsi scambievolmente in uno stesso punto N.

Di più, pel teorema VI. i tre quadrilateri Nocp, Npaq, Nqbo saranno circoscrittibili a' cerchi.

Rimane dunque a provarsi, che se in questi quadrilateri s' iscrivano i cerchi f, d, e, ciascuna delle rette ou, pv, qw sia tangente in un medesimo punto a due de' cerchi adjacenti, tra i tre cerchi d, e, f.

A tal effetto, supponiamo, che il cerchio D tocchi le se-

ganti Mb, Mc in o', o'', il cerchio E le seganti Mc, Ma in p', p'', il cerchio F le seganti Ma, Mb in q', q'', il cerchio M i lati bc, ca, ab, in A, B, C; e'l raggio di questo cerchio M sia designato dalla lettera ρ.

Se conducasi la tangente or al cerchio E; ed il cerchio f iscritto nel quadrilatero $Nocp$ tocchi i lati No, Np in l, m, si avrà pel teorema VIII.

$$2lo = or + o''p'$$
$$2mp = or - o''p'$$

e pel teorema X.

$$or = \rho + Mq'$$
$$2Mq' = Ma + Mb - ab$$
$$2o''p' = Ma + bc - (Mb + ca)$$
$$2Mq' + 2o''p' = 2Ma - (ca + ab - bc)$$
$$2Mq' - 2o''p' = 2Mb - (ab + bc - ca)$$
$$2Ba = ca + ab - bc$$
$$2Cb = ab + bc - ca$$
$$Mq' + o''p' = Ma - Ba$$
$$Mq' - o''p' = Mb - Cb$$

donde si avranno le equazioni

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 2lo = \rho + Ma - Ba \\ 2mp = \rho + Mb - Cb \end{array} \right.$$

Similmente, se conducasi la tangente ps al cerchio F, e che il cerchio d iscritto nel quadrilatero $Npaq$ tocchi i lati Np, Nq in m', n, si perverrà ad ottenere le equazioni.

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 2m'p = \rho + Mb - Cb \\ 2nq = \rho + Mc - Ac \end{array} \right.$$

E conducendo la tangente qt al cerchio D, ed il cerchio e iscrit-

to nel quadrilatero $Nqbo$ toccando i lati Nq, No in n', l'; si dedurranno le equazioni

$$3\begin{cases} 2\,n'q = \rho + Mc - Ac \\ 2\,l'o = \rho + Ma - Ba \end{cases}$$

E perciò si avranno finalmente le equazioni

$$4\begin{cases} 2\,lo = 2\,l'o = \rho + Ma - Ba \\ 2\,mp = 2\,m'p = \rho + Mb - Cb \\ 2\,np = 2\,n'q = \rho + Mc - Ac \end{cases}$$

Dalle quali si ravvisa, che i contatti l, l', si confondono tra loro, al pari degli altri contatti m, m', non che i rimanenti n, n'. — *C. B. D.*

Dopo ciò egli così conchiude: » I valori trovati delle doppie tangenti, conducono immediatamente ad un teorema dovuto » al sig. Tédenat [41] «, che enuncia, e poi dimostra facilmente, rimettendosi a' suoi precedenti teoremi. Ed in seguito ne deduce la soluzione del problema in quistione, come immediata conseguenza di tal teorema.

Procedendo innanzi, dimostrando altri teoremi da lui rilevati, fa vedere la corrispondenza de' suoi risultamenti con quelli del Malfatti, e passa poi a risolvere il seguente

PROBLEMA I.

fig. 3. *Un angolo dato* bca *sia diviso per metà dalla retta* Mc, *e ne' semiangoli* bcM, Mca *sieno iscritti comunque i cerchi tangenti* D, E, *i quali tocchino i lati* bc, ca *in* o, p; *si vuole inclinare tra' lati di quell' angolo la retta* ba *in modo, che*

[41] Veggasi sul proposito la nota n. 31.

divisi per metà gli angoli in a , b , con le seganti Ma , Mb , queste risultino tangenti a' cerchi E , D.

La cui analisi geometrica il conduce alla seguente

Costruzione.

Si tiri dal contatto o la tangente or al cerchio E, e tagliata sulla retta che biseca l' angolo bca; la cm'' uguale alla semisomma delle tangenti or, oc, cp, si elevi ad essa da m'' la perpendicolare $m''n''$, che incontri la cE in n''; indi tagliate le $m''T$, $m''z$ uguali alla $m''n''$, prendasi la $n''B$ uguale alla $n''T$, o $n''z$, e sopra cB s' innalzi la perpendicolare, che tagli la segante cm'' in M.

Ovvero congiungasi Bz, e dal punto n'' si tiri la perpendicolare alla Bz, che taglia la segante cM in M.

Oppure al punto c della cm'' si costituisca l'angolo $m''c\delta$ semiretto, e si elevi la perpendicolare alla cn'', che incontri la retta $c\delta$ in δ, dal qual punto si abbassi la perpendicolare alla cm'', che l' incontra in M.

Dal punto M così rinvenuto tirinsi le rette $Mp''a$, $Mo'b$ tangenti a' cerchi E, D, che incontrino i lati dell' angolo dato in a, b; si sarà in tal modo soddisfatto al problema.

PROBLEMA II.

fig. 3. *Iscritti in un dato triangolo abc, i tre cerchi tangenti D, E, F; indicare le espressioni trigonometriche delle tangenti, e de' diametri.*

Da' precedenti teoremi si deducono, senz' altro ragionamento, o calcolo, per le tangenti, le seguenti espressioni

$$2\,lo = hk' = Rx = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})}{\cos.\frac{a}{4}}$$

$$2\,mp = kg' = Sy = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{b}{4})}{\cos.\frac{b}{4}}$$

$$2\,nq = gh' = Tz = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})}{\cos.\frac{c}{4}}$$

E pe' diametri le altre

$$2\,dg = \frac{Sy.Tz}{Rx} = \rho\sqrt{2}.\,\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{b}{4})\,\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})\cos.\frac{a}{4}}{\cos.\frac{b}{4}\,.\cos.\frac{c}{4}\,.\,\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})}$$

$$2\,eh = \frac{Tz.Rx}{Sy} = \rho\sqrt{2}.\,\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})\,\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{c}{4}\,.\cos.\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}\,(45 + \frac{b}{4})}$$

$$2\,fh = \frac{Rx.Sy}{Tz} = \rho\sqrt{2}.\,\frac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})\,\text{sen.}\,(45 + \frac{b}{4})\cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\,.\cos.\frac{b}{4}\,.\,\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})}$$

Prosegue dopo ciò le sue ricerche teorematiche relative allo stesso argomento delle *Tazioni*; le quali mostrano abbastanza la fecondità del suo ingegno, e del metodo da lui adoperato: ma noi tralasciamo di quì recarle, per non essere troppo lunghi, nè tampoco stimandole necessarie allo scopo cui miriamo; rimettendo chi desidera conoscerle all' eccellente lavoro originale, e degno di tutta la considerazione de' geometri, del sig. Paucker; e solamente stimiamo di non dover omettere di recar quì il seguente altro teorema segnato col num. 40.

TEOREMA.

Sia M il centro del cerchio iscrittibile nel triangolo a b e, in cui sieno pur iscritti tre altri cerchi, de' quali uno soltanto f sia toccato dagli altri due in l, m; e sieno tirate le tangenti comuni interiori l o, mp, che incontrino i lati in o, p, e congiunte le rette fo, fp. Se da' punti f, o si abbassino sulla segante Mb le perpendicolari fs, o t, e da' punti f, p sull' altra segante Ma le perpendicolari fr, pu; le parti t s, r u interposte tra queste perpendicolari saranno tra loro uguali. *fig. 6.*

Dopo averlo dimostrato, passa, in un corollario, ad esprimere in forma simbolica trigonometrica i valori delle *ru*, *st*, che sono i quì appresso

$$ru = fk \text{ sen. } \frac{a}{2} + pk \cdot \cos. \frac{a}{2} = \sqrt{fk}\,(\sqrt{fk}.\text{sen.}\frac{a}{2} + \sqrt{dg}.\cos.\frac{a}{2}$$

$$st = fk' \text{ sen. } \frac{b}{2} + ok' \cdot \cos. \frac{b}{2} = \sqrt{fk}\,(\sqrt{fk}.\text{sen.}\frac{b}{2} + \sqrt{eh}.\cos.\frac{b}{2})$$

E poichè *ru* si è dimostrata uguale ad *s t*, ne risulta l' equazione

$$\sqrt{fk}.\text{sen}.\frac{a}{2}+\sqrt{dg}.\cos.\frac{a}{2}=\sqrt{fk}.\text{sen}.\frac{b}{2}+\sqrt{eh}.\cos.\frac{b}{2}$$

E poi così conchiude : « Questa equazione sviluppata in un » modo differente da due geometri di Berlino, sig. Crelle e Lechmütz, » gli ha condotti alla soluzione trigonometrica, ch' essi hanno pub» blicata a tal proposito, e che io passo a presentare con le con» venienti modificazioni.

Or noi avendo già di sopra recata la soluzione di questi due distinti professori, ci crediamo in dovere di riportare ancor quella del Paucker, che con ingenuità propria di chi, avendo vero merito, non va usurpando le altrui cose, la dà come derivata da quelle de' matematici di Berlino, non ostante, che grandissima sia la differenza che v' ha tra esse, nè facile a ravvisarsi da chiunque. E ciò potrà servire di convenevole avvertimento a que' nostri professori, i quali non avrebbero certamente dovuto, per piccoli ed insignificanti cambiamenti, attribuirsi senza scrupolo ciò, che manifestamente appartenevasi al Lechmütz, come ognuno poteva rilevarlo dagli *Annali* del Gergonne [43]. Ma per essi non è già la prima volta che abbiano tenuto tal procedimento, come si è di sopra accennato, relativamente alla soluzione del Gergonne, del problema di una curva conica e tre punti dati.

---

[43] Si riscontri su tal proposito la nota (*s'*) al programma.

Soluzione trigonometrica del problema.

Il cerchio d essendo toccato da' cerchi e, f, in n, m, se tirinsi le tangenti comuni interiori nq, mp, il teorema precedente dà l'equazione. *fig. 4*

$$1.)\ dg\,.\,\text{sen.}\frac{b}{2} + nq\,.\,\cos.\frac{b}{2} = dg\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + mp\,.\,\cos.\frac{c}{2}$$

Il cerchio e essendo toccato da' cerchi f, d in l, n, se tirisi anche la tangente comune interiore lo, si avrà, pel medesimo teorema

$$2.)\ eh\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + lo\,.\,\cos.\frac{c}{2} = eh\,.\,\text{sen.}\frac{a}{2} + nq\,.\,\cos.\frac{a}{2}$$

Moltiplicando queste equazioni per lo, mp respettivamente, ed avendosi per gli altri teoremi già riportati

$$3.)\qquad dg\,.\,lo = mp\,.\,nq\quad,\quad eh\,.\,mp = nq\,.\,lo$$

si avrà

$$mp.np.\text{sen.}\frac{b}{2} + nq.lo.\cos.\frac{b}{2} = mp\,.\,nq\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + lo\,.\,mp\,.\,\cos.\frac{c}{2}$$

$$nq\,.\,lo.\text{sen.}\frac{c}{2} + lo.mp.\cos.\frac{c}{2} = nq\,.\,lo\,.\,\text{sen.}\frac{a}{2} + mp.\,nq\,.\,\cos.\frac{a}{2}$$

Sommando queste equazioni, e riducendo si otterrà

$$4.)\ lo.(\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2}) = mp.(\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2})$$

Per ridurre i coefficienti si avrà da prima

$$\cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2} = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a+b}{4})\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4}) = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4})$$

$$\cos.\frac{a}{2} - \text{sen}\,\frac{b}{2} = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a+b}{4})\,\text{sen.}(45 + \frac{a-b}{4}) = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4})$$

e poichè

$$\text{sen.}\frac{c}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\,.\,\cos.\frac{c}{4}$$

si avrà

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\left(\cos.\frac{c}{4} + \text{sen.}\left(45 - \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\left(\cos.\frac{c}{4} + \text{sen.}\left(45 + \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

ossia

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2} = 4.\,\text{sen.}\frac{c}{4}.\,\cos.\frac{a}{4}.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})$$

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2} = 4.\,\text{sen.}\frac{c}{4}.\,\cos.\frac{b}{4}.\,\text{sen.}(45 + \frac{a}{4})$$

Sostituendo nell' equazione (4), e riducendo, si ottiene

$$5 \left\{ \begin{array}{l} lo = mp.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4}).\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})} \\ \text{ossia} \\ nq = dg.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4}).\cos\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}.\,\text{sen.}(45 + \frac{a}{4})} \end{array} \right.$$

e per un analogo procedimento

$$6 \left\{ \; mp = dg.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4}).\cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4}.\,\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})} \right.$$

Moltiplicando le equazioni 5, 6, si avrà

$$7 \left\{ \; lo = dg.\dfrac{\text{sen.}^2(45 + \frac{a}{4}).\cos.\frac{b}{4}.\cos.\frac{c}{4}}{\cos.^2\frac{a}{4}.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})\,\text{sen.}(45 + \frac{c}{4})} \right.$$

Il cerchio M, del raggio ρ, toccando i lati del triangolo in A, B, C, dà

$$2 . Ba = 2\rho . \cot.\frac{a}{2} = ca + ab - bc$$

$$ca = ck + ag + 2mp$$
$$ab = ag + bh + 2nq$$
$$bc = bh + ck + 2lo$$
$$ca + ab - bc = 2ag + 2mp + 2nq - 2lo$$

dunque

$$8)\qquad \rho.\cot.\frac{a}{2} = dg . \cot.\frac{a}{2} + mp + nq - lo$$

Sostituendo i valori di mp, nq, lo, moltiplicando per $\text{tang}.\frac{a}{2}$, ed osservando che

$$\text{tang}.\frac{a}{2} . \cot.\frac{a}{2} = 1 \quad , \quad \text{tang}.\frac{a}{2}\frac{\text{sen}.(45 + \frac{a}{4})}{\cos.\frac{a}{4}} = \frac{\text{sen}.\frac{a}{4}}{\cos.(45 + \frac{a}{4})}$$

si perviene all' equazione finale

$$9\left\{\rho = dg + dg . \text{sen}.\frac{a}{4}\,\frac{\left[\text{sen}.(45+\frac{c}{4})\cos.\frac{a}{4} . \cos.\frac{b}{4} + \text{sen}(45+\frac{b}{4})\cos.\frac{c}{4}\cos.\frac{a}{4} - \text{sen}.(45+\frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}\right]}{\cos.\frac{a}{4} . \cos.(45+\frac{a}{4}) . \text{sen}.(45+\frac{b}{4})\text{sen}.(45+\frac{c}{4})}\right.$$

Per ridurla si farà uso delle formole

$$2\cos.\alpha . \cos.\beta = \cos.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha-\beta)$$
$$2\,\text{sen}.\alpha . \cos.\beta = \text{sen}.(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$$

che danno il mezzo di sviluppare il prodotto di tre seni, o coseni

$$4.\text{sen}.m . \cos.n . \cos p = \left\{\begin{matrix}\text{sen}.(m+n+p) + \text{sen}(m+n-p)\\ +\text{sen}.(m-n+p) + \text{sen}.(m-n-p)\end{matrix}\right\}$$

O

Facendovi le convenienti sostituzioni, si trova

$$
10\left\{\begin{array}{l}
4.\text{sen}.(45 + \frac{c}{4})\cos.\frac{a}{4}\cos.\frac{b}{4} = 1 + \cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2} \\
4.\text{sen}.(45 + \frac{b}{4})\cos.\frac{c}{4}\cos.\frac{a}{4} = 1 + \cos.\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} \\
4.\text{sen}.(45 + \frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4} = 1 + \cos.\frac{b}{2} + \cos.\frac{c}{2} + \text{sen}.\frac{a}{2} \\
4.\cos.(45 + \frac{a}{4})\text{sen}.(45 + \frac{b}{4})\text{sen}.(45 + \frac{c}{4}) = 1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2} \\
4.\cos.(45 + \frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4} = \cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2}
\end{array}\right.
$$

L' equazione 9 diverrà dunque

$$\rho = dg + dg . \frac{\text{sen}.\frac{a}{4}(1 + 2\cos.\frac{a}{2} - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}$$

$$\rho = dg . \frac{2\,\text{sen}.\frac{a}{4} . \cos.\frac{a}{2} + (\text{sen}.\frac{a}{4} + \cos.\frac{a}{4})\ (1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}$$

Or

$$2\,\text{sen}.\frac{a}{4} . \cos.\frac{a}{2} = 2\,\text{sen}.\frac{a}{4}(\cos.\frac{a}{4} + \text{sen}.\frac{a}{4})\ (\cos.\frac{a}{4} - \sin.\frac{a}{4})$$

$$2\,\text{sen}.\frac{a}{4} . \cos.\frac{a}{2} = (\cos.\frac{a}{4} + \text{sen}.\frac{a}{4}) . (2\,\text{sen}.\frac{a}{4}\cos.\frac{a}{4} - 2\,\text{sen}.^2\frac{a}{4})$$

$$2\,\text{sen}.\frac{a}{4} . \cos.\frac{a}{4} = (\cos.\frac{a}{4} + \text{sen}.\frac{a}{4}) . (2\,\text{sen}.\frac{a}{2} + \cos.\frac{a}{4} - 1)$$

Dunque

$$p = dg \cdot \frac{(\cos.\frac{a}{4} + \sin.\frac{a}{4})\ (\cos.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}$$

$$p = dg \cdot \frac{\sqrt{2}\ \text{sen}.(45 + \frac{a}{5}) \cdot 4 \cdot \cos.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4} \cdot 4 \cdot \cos.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{c}{4})}$$

$$p = dg \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\text{sen}.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4} \cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4} \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{c}{4})}$$

Dal che si ha, rovesciando,

$$\text{11}\quad \begin{cases} dg = p \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}\ (45 + \frac{c}{4}) \cdot \cos.\frac{a}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \cos.\frac{c}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{a}{4})} \\[2ex] eh = p \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{c}{4}) \cdot \text{sen}\ (45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos.\frac{c}{4} \cdot \cos.\frac{a}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4})} \\[2ex] fk = p \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \cos.\frac{c}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos.\frac{a}{4} \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{c}{4})} \end{cases}$$

conforme al problema II. riportato di sopra.

Assoluta ancor questa ricerca, continua il Paucker le sue investigazioni di nuovi teoremi sulle *Tazioni*, e risolve inoltre i seguenti problemi

PROBLEMA I.

fig. 7. *Iscrivere in un triangolo abc due cerchi tangenti, sicchè la linea de' loro centri risulti parallela ad una retta fk di posizione.*

Costruzione.

Iscrivasi il cerchio M nel triangolo dato, e condottovi il diametro rs parallelo alla retta data di posizione, si tirino le ar, bs, che s' interseghino in n; ed as, br che s' interseghino in N: i punti n, N saranno i contatti dimandati. E tirando da questi punti le parallele alla fk, i punti d, e, D, E, ove queste incontreranno le seganti Ma, Mb, saranno i centri de' cerchi dimandati

PROBLEMA II.

fig. 8. *In un triangolo abc iscrivere due cerchi tangenti d, e, tal che condotta ad essi le comune tangente interiore, questa incontri la base ab in un punto dato q.*

Costruzione.

Iscrivasi nel triangolo dato il cerchio M, che tocchi il lato bc in A; e congiunte le Ma, Mb, dal punto dato q si tiri la perpendicolare qL ad una delle seganti, che taglia l' altra in O. Pe' punti L, O, e col diametro uguale alla tangente Ac, descrivasi il cerchio R; e poi col centro q descrivansi due cerchi concentrici tangenti l' altro R. Le loro circonferenze taglieranno la base, l' una in

g, h', l'altra in G, H', che saranno i puuti ne' quali i cerchi dimandati dovranno toccare la base. Da questi punti si tirino le perpendicolari; queste segneranno sulle seganti Ma, Mb i centri di tali cerchi

Problema III.

Iscrivere in un triangolo abc tre cerchi tangenti, sicchè i contatti de' due primi con due lati, confondansi con quelli del terzo cerchio co' medesimi lati. *fig. 9.*

Costruzione.

Iscrivasi nel triangolo il cerchio M, che tocchi i lati in A, B, C, congiungasi Cc, e bisecato l' angolo aCc, sieno d, E i punti d' incontro della retta, che il biseca colle seganti Ma, Mb. Dividasi similmente l' angolo bCc per metà, e la dividente incontri le Mb, Ma in e, D; uniscansi poi le de, DE, queste incontreranno la retta Cc in n, N; di tal che Nn = Ac = cB.

Il Paucker invita il lettore a paragonare tal sua soluzione con quella del Lechmiitz, pubblicata nell'appendice al vol I. della Geometria di questo distinto professore. E noi, mirando sempre allo scopo principale propostoci, invitiamo i coltivatori dell' analisi pura a trattare col loro metodo, con la stessa facilità e chiarezza, questi problemi, e le altre ricerche dal Paucker geometricamente rinvenute ed esposte.

NUM. VIII.

Osservazioni sulle precedenti ricerche sul problema del Malfatti.

1. Dall' esposizione fatta delle diverse ricerche per la soluzione di questo difficil problema è facile rilevare, che la soluzione originale algebrica di esso sia quella del Malfatti, la quale vi avrebbe interamente soddisfatto, se il sagace autore, ad evitare la lunghezza e complicazione del calcolo da lui eseguito, per giuguere a quelle tre equazioni, che suppone e poi verifica, non si fosse veduto costretto a preferir questo ripiego. Ma niuno potrà negare a siffatta verifica quel grado di semplicità e di evidenza, che dovea da sì distinto geometra aspettarsi. L'analisi, per quella piccola parte che ne appare, è ricca di belle verità nuove, che facilmente ne derivano, delle quali quella che leggesi nella nota *num.* 31 (*pag.* 62), dimostrata in maniera diretta, forma la base della più elegante soluzione geometrica di quel problema: ed essa impropriamente attribuita al sig. Tédenat valente matematico francese, è stata riguardata come un bel teorema, che si è più comunemente intitolato col suo nome.

Il risultamento finale dell'analisi del Malfatti mena ad una costruzione elegantissima, eludendo ogni aspettazione: e si osservi a tal proposito esser questa la principal cosa cui mirava il Malfatti; giacchè la soluzione del problema gli era dimandata da un artista per usarne in pratica. La soluzione dunque del Malfatti, considerata per questa sola parte, non lascia che desiderare.

2. Gli sforzi riuniti de' compilatori degli *Annali* in risolverlo, prima di conoscere la soluzione del Malfatti, mostran chiaro il lun-

go studio , e gli stenti , che dovettero soffrire per più anni , a fin di pervenire ad una espressione incostruibile del raggio dell' un de' cerchi ; che però giustamente essi la tennero come un valore , e considerarono però il problema per aritmeticamente risoluto : nè avvertirono tampoco la riduzione , che poteva farsene a forma più semplice e costruibilissima , come quella del Malfatti , nè pur quando ebbero questa innanzi gli occhi ; che anzi manifestamente affermarono , che la loro espressione del raggio r (*pag.* 69) dell' un de' tre cerchi , e quella corrispondente del Malfatti (*not.* 34.) , sebbene identiche , sembrassero però incomunicanti , e da non vedersi modo da ridurre l'una all'altra .

Aggiungasi , che gli *annalisti* , in tal problema che , per la sua natura anche posizionale, avrebbe meritato di esser trattato col loro metodo prediletto *delle coordinate* , di cui tanto erano allora occupati in mostrare l' efficacia al paragon degli altri , dovettero rinunziarvi, ripiegando sul metodo algebrico-geometrico antico , sebbene non perfettamente adoperandolo , non vedendosi la loro analisi connessa e regolare . La Geometria dunque , nel cui dominio era questo problema , nulla aveva vantaggiato dalle faticose ricerche degli *annalisti* .

3. Conosciuta ch' essi ebbero la soluzione del Malfatti , che mostrarono apprezzar grandemente , vollero tentar la verifica delle tre equazioni da quello assunte , in maniera che essi giudicarono più semplice . Ma a noi non pare , avendo riguardo alla moltiplicità delle sostituzioni e riduzioni , che possa tal verifica prevalere in semplicità e naturalezza a quella del Malfatti . Del rimanente , ciò niente montando , lasciamo agli altri giudicarne .

4. Imitolli in questa ricerca il Tédenat , e nè tampoco sembra , ch' egli avesse vantaggiata l' analisi del Malfatti (il solo oggetto,

che si avrebbe dovuto prender di mira, o continuando l' analisi da quello intrapresa, in modo da giugnere facilmente al termine di essa, evitando quella trasmutazione in teorema, o anche dimostrando questo in modo diretto e semplice). E tutto quello che si potrebbe al più raccoglıere dalle ricerche del Tédenat sarebbe quel teorema, che noi abbiamo veduto esser evidentemente compreso nell'analisi del Malfatti; e che avrebbe dovuto rimeritarne il Tédenat, sol quando lo avesse in modo diretto e geometrico dimostrato.

5. Con la scorta della soluzione del Malfatti, e sempre mirando a' risultamenti da questo ottenuti, il professore Lechmutz di Berlino ne aveva intrapresa una nuova soluzione, che avrebbe meglio corrisposto allo scopo, se non fosse stato in obbligo di sopraccaricarla di formole trigonometriche, e di non lievi analitici ripieghi.

6. Fin quì dunque non si aveva di tal problema una soluzione puramente geometrica, come richiedevasi, nè tampoco una costruzione che derivasse da un' analisi algebrica regolare; al primo de' quali oggetti mirando il sig. Paucker, distinto geometra associato all' Accademia di Pietroburgo, presentò a questa, nel 1828, la sua soluzione, che vedesi inserita nel volume degli Atti di essa per l' anno 1831.

L'orditura di questa soluzione geometrica, sebbene ammirabile, è però, come si è veduto, lunga ed intralciata, di tal che l' illustre autore non fidandosi di sostenerne una lunga analisi geometrica, contenente molti nuovi lemmi, per altro importanti, anche a parte della soluzione cui servono, si vide costretto a tacer quella, ed a rivolgersi alla dimostrazione della costruzione presentata del problema; dalla quale non potrebbesi facilmente, se mai alcuno il desiderasse, fare ritorno all'analisi del medesimo.

Per tali ragioni non desistevasi, dagli apprezzatori dell' antica Geometria, di dimandare di questo problema una soluzione sì semplice come la natura del medesimo; dal che fui indotto al procedimento indicato nella parte II. delle presenti *Considerazioni*. Nè credo per ciò avere men che accortamente operato, da raccoglierne anzi che lode, alla quale non pretendo certo, ma almeno nè men taccia di far rivivere cose già viete, e poco curate. E da prima sappian coloro i quali non che così pensano, osano ancor propalare simili sciocchezze, nessuna ricerca in Matematiche invecchiar mai, quando in nuova forma, e migliore si riproduca. Dover anzi queste scienze a ciò i loro più grandi progressi: del che potrei addurre molti esempj, che tralascio per non deviar troppo dal mio scopo, limitandomi solamente a ricordare, ad istruzion di coloro che hanno profferita simile proposizione, che i problemi di trisegar l' angolo e duplicar il cubo, furono ripetutamente trattati, e pel corso intero di secoli nella scuola Greca; nè però vi fu chi tra que' sommi uomini credesse ciò mal fatto, ed indegna de' più gran geometri una tale occupazione. Gli stessi, non appena il Cartesio produsse la sua novella Geometria, ricomparvero in iscena; e da quell' epoca fin ora quante soluzioni con diverso metodo, e quante ricerche su di essi non si sono fatte, che hanno di gran lunga contribuito a promuovere le Matematiche? Ed ultimamente i coltivatori del metodo puro analitico hanno creduto non poter far a meno di occuparsene; sebbene le loro ricerche non sieno corrispondenti alla natura di tali problemi, essendosene dell' uno data una soluzione approssimante, dell' altro meccanica: che anzi spiace a' rigorosi estimatori del grado e natura de' problemi, il veder quello della trisezione dell' angolo ascritto tra le ricerche di analisi trascendente. Sarebbe dunque solamente

P

divenuto indecente il riprodurre in iscena un problema difficile apparso la prima volta alla considerazione de' geometri da circa 38 anni fa ; e da quell' epoca a diverse riprese tentato da matematici distinti di tutta Europa , senza mai dimenticarlo , e cercandone sempre una più elegante soluzione ? Se questa maniera di ragionare sia di chi ha sano intendimento , e cuor non corrotto , il lascio giudicare ad altri .

Finalmente aggiugnerò come nobil conchiusione al fin qui detto il sentimento del La-Grange così espresso . » E c' est toujours contribuer à l' avancement des Mathématiques , que de » montrer comment on peut résoudre les mêmes questions, et parvenir » aux mêmes resultats par des voies tres differentes ; les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel , et en acquierent » souvent un plus grand degré d' evidence et de généralité (*Nouvelle solution du probléme du mouvement de rotation d' un corps de figure quelconque , qui n' est animé par aucune force accélératrice*. Académie de Berlin an. 1773).

NOTA AGGIUNTA

alla *pag.* 23 nell' ultimo rigo, ove dicesi *impossibilità.*

Poichè l'oggetto che mi ho proposto con questo mio programma è quello d'istruire, e non altro, conviene che mi occupi a comentare quel luogo di Pappo, di cui ne aveva alla *pag.* 22 recata solamente la parte, che mi occorreva, per mostrare a chi si appartenesse la determinazione ne' problemi. Ma avendo poi avvertito, dall' impropria *risposta al Programma*, che ciò ch' egli soggiungne sia stato malamente da coloro inteso, per difetto di conoscenza nella Geometria, mi sono creduto nel dovere d'interpetrarglielo convenevolmente. Il luogo per intero è il seguente: Pappo indrizzando a Cratiste suo amico, e geometra perspicasissimo, questo terzo libro delle *Collezioni*, gli dice: *Qui vero proponit problema, siquidem indoctus est, et omnino rudis, quamquam proponat id, quod construi quodammodo non possit, dignus venia est, et culpa vacat. Quaerentis enim officium est, et hoc determinare, et id quod fieri, et quod minime fieri potest; et si fieri potest quando, et quomodo, et quotupliciter fieri possit.* Fin qui il precetto di Pappo è assoluto, ed accorda al geometra, ed al non geometra il proporre problemi come gli piace, dando ad obbligo del risolutore il dimostrarne l' impossibilità, o assegnarne la compiuta determinazione. Ed avvertasi pure, che il greco autore, la cui dottrina è quella di tutta la scuola antica, con quel *construi quodammodo non possit*, riferisce il suo precetto *all' assoluta impossibilità*, sicchè debba esservi ripugnanza geometrica nelle condizioni del problema proposto; come di chi per esempio proponesse a costruire un triangolo con tre rette, che fossero come i numeri 5, 3, 2. Poi così ripiglia. *Quod si quis imperite proponat, cum mathematicas scientias profiteatur, non est extra culpam.* Ed ora, esaurito interamente quel primo precetto, ne incolpa chi essendo matematico proponesse *imperitamente* un problema. Ma quì egli non si arresta, e subito entra a dichiarare quell' *imperitamente* cosa valesse, soggiugnendo al suo amico: *Nuper quidam eorum qui mathematicas scientias profitentur, per tuas problematum propositiones imperite nobis determinarunt; de quibus, et similibus oportebat nos ad tuam, et studiosorum utilitatem in tertio libro Collectionum mathematicarum demontrationes afferre. Primum igitur problema, quidam qui magnus geometra*

videbatur inscite determinavit (si noti che non dice *proposuit*) *: etenim datis duabus rectis lineis duas medias proportionales in continua analogia invenire* SE SE DIXIT PER PLANORUM CONTEMPLATIONEM. L'*imperite* dunque è relativo ad un che voleva risolvere come piano il problema delle due medie proporzionali, vale a dire, che pretendevane una risoluzione contraddittoria alla sua natura. E chi di noi non dice lo stesso de' nostri *trisegatori* e *duplicatori*; e farebbe torto ad un geometra che ciò pretendesse. Se dunque nel proporsi ripetutamente il problema sulla piramide da matematici distinti, si è pretesa qualche cosa contraddittoria alla natura del problema, i risponditori al programma avranno ragione di prevalersi del luogo di Pappo; ma se nulla di ciò, è un' audacia il porre innanzi un testo di greco maestro, che essi non sanno nè meno intendere.

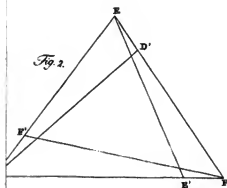
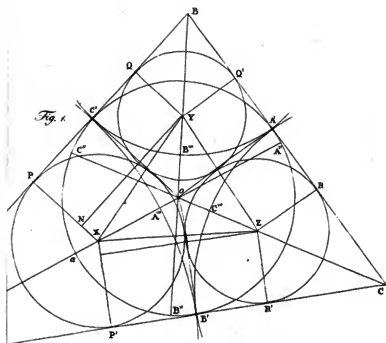
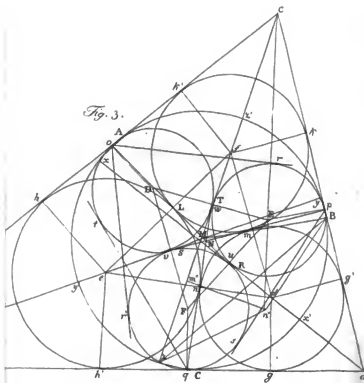
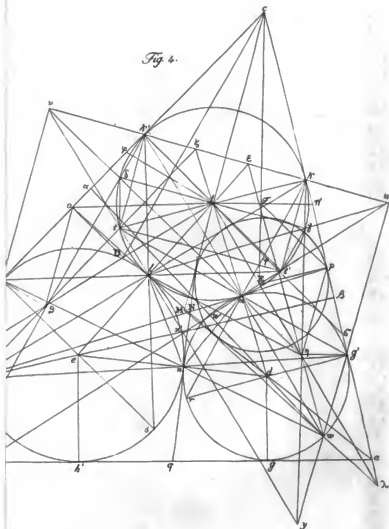
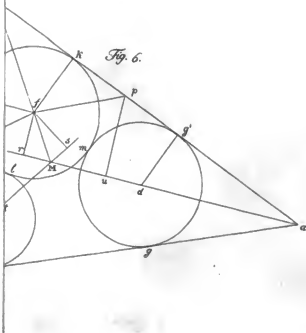
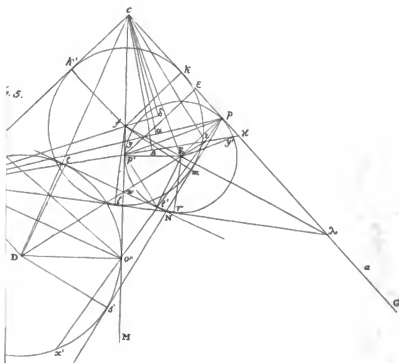
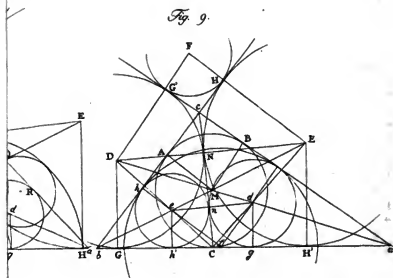
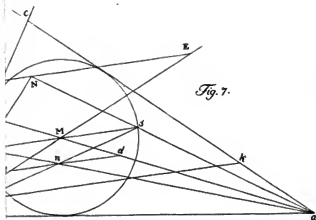
Fig. 1.
B
Q
Q'
C'
Y
A'
C''
B'''
A''
P
R
o
C'''
N
A'''
Z
X
a
C
B''
B'
R'
P'
Fig. 2.
E
D'
F'
E'
F

Fig. 3.

Fig. 4.

.5.
Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 9.

ANALISI CRITICA

DELLA

RISPOSTA PUBBLICATA

in nome di

FORTUNATO PADULA

AL

PROGRAMMA

PROPOSTO DA UN NOSTRO DISTINTO PROFESSORE, PER PROMUOVERE, E COMPARARE I METODI PER L' INVENZIONE GEOMETRICA.

AVVERTIMENTO.

La presente *analisi critica* della *risposta al programma* di tre quistioni geometriche proposte da un antico nostro distinto professore, era stata da noi fatta fin da che leggevamo una tal *risposta*, a misura che l' andavamo percorrendo; nè pur per ombra pensavamo a pubblicarla, non volendo far cosa che forse potesse a quel rispettabile uomo, cui dobbiamo non poco di nostra istituzione, dispiacere. E però ci eravamo negati sempre di condiscendere alle premure, che ce ne facevano alcuni amici e colleghi, a' quali la leggevamo per sentirne la loro opinione, e che con noi indegnavansi del degradamento in cui inducevano loro medesimi gli autori di tal *risposta*. Ma non tralasciando mai quelli d' insistere, perchè a pubblico vantaggio, ed esempio si dasse alle stampe, non abbiam potuto più negarci alle loro giuste premure, subito che l' autore stesso del programma ha creduto riprodurlo, aggiugnendovi in fine alcune note critiche, e con una *dichiarazione* premessavi; dalle quali cose rilevasi, ch' egli non abbia creduto doversi assolutamente tacere su tal proposito. Se non che, non avendo stimato di sua dignità il discendere in

troppo particolari sulla *risposta*, ci ha ben presentato il mezzo da non rendere inutile la nostra *analisi critica*, dalla quale abbiamo perciò solamente tolte le cose da esso positivamente dichiarate : sicchè questa può benissimo stare con quella, e farne come il compimento. Intanto avvertiremo, non esser nostro intendimento andar una per una rilevando le incongruenze, le false dottrine, ed i discorsi vuoti di senso, che ravvisansi in tal *risposta*, che nè ci regge l' animo a trattar cose di simil natura, nè crediamo esservene bisogno, non essendovi principiante sul buon cammino d' istituzione matematica, che non le ravvisi a prima vista come indecenti insulsità, che non pur dispiacciono, ma divengono stomachevoli. Tal sarebbe, per esempio, lo sragionar che si fa su' metodi degli antichi e de' moderni, e del loro proprio uso in tutta la lunga *prefazione*, con un discorrer di ciò per siffatto modo, e con tale puerile franchezza affastellando e Geometria antica, e moderna, e descrittiva, ed Analisi elementare, e degli Infiniti, e Meccanica, e dicendo di ciascheduna quello che ne pare e piace, componendone un pompeso ed informe lavorìo di parole, che fa girar la testa a chiunque. E lo stesso ha ancor luogo di tanto in tanto nella pretesa *risposta* a' quesiti del programma. E noi ben volentieri ci presteremmo a rispondere a taluna meno irragionevole loro pro-

posizione, se fossimo persuasi di esser capiti; che per intender in iscienza, bisogna aver istituzione, e di questa per l'appunto ravvisiamo in essi qualche difetto; del che a convincerne loro medesimi, gli pregheremo solamente a considerar meglio ciò, che con tanta franchezza asseriscono intorno al testè detto metodo degli antichi, ad essi affatto ignoto, sull'autorità del Cartesio, leggendo la nota alle prop. 26 e 28 El. VI. dell'Euclide del Simson, o ancor più di quello del nostro prof. Flauti, che pure avrebbero dovuto conoscere, essendosene fatte ben sedici edizioni sotto i loro occhi.

Non dobbiamo tacere, che avendo presentato questo nostro involontario lavoro all'autor del programma, egli non abbia voluto pur per ombra rivolgervi lo sguardo, dissuadendoci dallo più oltre far conoscere un indecente, e poco giudizioso procedimento, che solo a raffrenarlo alquanto, in quella parte che riguardava il mal concertato pretesto, da'risponditori prodotto a coprire loro viltà, si era egli finalmente indotto a dar fuori quella sua *dichiarazione*; che pure or pensava sarebbe stato meglio trascurar la cosa del tutto, essendo le sciocche e calunniose dicerie solo degne di spregio. È soggiugneva esser egli ben contento di aver conseguito lo scopo, che col programma si aveva prefisso, di rianimar lo spirito matematico scaduto in troppo languore nel suo paese, e

di poter conoscere dalle cose pubblicate da' contradditori, e dalle risposte che legalmente sono all' Accademia pervenute, o anche a lui inviate, qual fosse or lo stato della scienza geometrica presso noi, per effetto della moderna maniera d' istituire * ; onde potervi apportare que' rimedj, che crederà opportuni, e saranno in suo potere di adoperare; formando ciò sua principale incombenza, come prefisso dal Governo a regolar questa parte della P. I. del nostro Regno. E noi, che con i molti conosciamo quanto debba alle sue assidue cure la coltura, e l' estensione degli studj matematici nel nostro paese, e che abbiamo assai a cuore la gloria di questo, e 'l decoro, e non il depressione de' nostri professori, facciamo voti per la buona riescita di queste sue ottime intenzioni.

---

* Di tutte queste cose egli si propone render conto all' Accademia, nella relazione che dovrà presentarle, dopo il giudizio delle classe matematica su' lavori che tiene ancora in esame.

INTRODUZIONE.

Sul cader di aprile del corrente anno fu pubblicato, *dalla stamperia per le opere del prof. Flauti*, un programma, in cui vengon proposte ai geometri delle due Sicilie le tre quistioni seguenti:

I. » *Esibire la corrispondente convenevole costruzione geo-* » *metrica della soluzione analitica data dal La-Grange del pro-* » *blema di: iscrivere in un dato cerchio un triangolo, i cui la-* » *ti passino per tre punti dati*; non dipartendosi affatto da que' » medesimi principj da quel sommo analista stabiliti per pervenire al- » l'equazione finale del medesimo; e compierne poi con gli stessi prin- » cipj la dimostrazione analitica [1].

II. » *Iscrivere in un triangolo dato di specie, e di grandezza* » *tre cerchi, i quali si tocchino tra loro, e tocchino i lati del* » *triangolo*.

III. » *Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfe-* » *re, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della* » *piramide*.

L' autor del programma fissava un periodo di tre mesi per la risoluzione di siffatte quistioni, proponendo di suo peculio, per chi

[1] Il carattere italico dinota quella parte della quistione proposta dall' autor del programma, che nella *risposta* pubblicata si è ritenuta nell' enunziarla di nuovo; ed il carattere rotondo ciò che, per comodità di risposta, si è taciuto. Il qual procedimento non tanto offende l' esattezza e la verità, quanto il Pubblico, giudicandolo sì superficiale, da acchetarsi della sola asserzione de' contraddittori, in una risposta piena di livore e di maldicenza. E la stessa diligenza si userà da noi sempre in appresso.

vi adempisse, con le condizioni che assegnava, » il premio di una me-
» daglia di oro di ducati sessanta per ogni quistione, non a titolo
» di compenso (così Ei si esprime) che nè pari alla nobiltà della
» scienza, e de' coltivatori di essa, nè al servigio importante che
» a questa si rende, si potrebbe da noi dare; ma semplicemente
» per offrire un contrassegno pubblico, e permanente al merito di
» tanta operazione «. E siffatta gentile profferta è stata nella *Risposta* malignamente alterata, con dirvisi: *e perchè non rimanesse senza guiderdone quegli cui toccasse in sorte di risolvere siffatti problemi, vien generosamente promesso dall' autore medesimo un premio di una medaglia di oro di ducati sessanta per ogni quistione, onde offrire un contrassegno pubblico e permanente di tanta operazione.*

Le risposte de' concorrenti, come nel programma stesso era prescritto, inviar doveansi alla R. A. delle Scienze, per mezzo del suo segretario perpetuo, avendo la medesima assunto l'incarico di giudicare del merito delle risoluzioni. E noi attendiamo con premura un tal giudizio, onde congratularci de' progressi delle matematiche nel nostro paese.

Scorso intanto il periodo stabilito, videsi pubblicata una scritta a nome di un tal *Fortunato Padula*, giovine istituito nelle matematiche da' chiarissimi professori Tucci e de Angelis [1], col titolo— *Risposta al programma destinato ec.*, stimando coloro, che ne sono stati gli autori, sconvenevole ad essi il ristretto giudizio di un' Accademia, e do-

[1] Questi due istancabili professori fanno giornalmente lezioni nel Real Collegio Militare dell' Annunziatella, e nella Scuola di Acque e Strade; ed hanno inoltre frequentissimo studio privato, per que' giovani, che aspirano per loro mezzo all' alunnato in quella scuola.

versene però appellare all'amplissimo del pubblico, cui, usando ancor noi di sua pazienza, osiamo proporre questa nostra breve *analisi* di quella *risposta*, con la quale non pretendiamo di certo assumere il grave incarico di guarentir la scienza geometrica, che da tanto non siamo, nè essa ne ha bisogno: nè tampoco per liberar il programma dalle false imputazioni, che nè del distinto uomo che l' ha proposto posson menomare la stima, nè il pubblico si fa sì facilmente sorprendere, non dovendo di queste cose giudicare, che solamente coloro nelle Matematiche, e ne' metodi profondamente versati. L' unico nostro scopo dunque si è di rendere alla gioventù studiosa di esse qualche lieve servigio, che per noi si possa; che potrebbe forse alcuno dagli altrui errori soffrirne. Ed è a questo solo titolo, che noi, con assai dispiacere, ci siamo indotti ad entrare in tal esame; che ad animo ben fatto, e nelle ingenue arti allevato, non può ritornar grato lavoro quello di trattar maldicenza, sebben giusta, molto men se livorosa, e contro lodevele e nobile operato diretta. Che però ci siamo ben guardati dal porre in fronte a tale nostra scrittura il nome, non volendo acquistar merito, che anche da voluto e giusto demerito altrui risulti, e che dia di noi allo straniero ragione ben giusta da censurare e 'l nostro stato di coltura, e la presente civiltà nostra. Cercheremo quindi, in questa *analisi critica*, di usare, per quanto sarà possibile a riguardo della *risposta* pubblicata, tutta l' urbanità e la decenza; nè però ci fideremmo proporre ad alcuno, per cupido che lo stimassimo di lodi, che un tal nostro libriccino accettasse in dedica; nè crederemmo poter trovare nel nostro gentil paese persona che a simile bassezza si prestasse. I lavori critici, se ben ragionati e decenti, sono pur necessarj al progresso delle scienze, abbattendo gli errori, che potrebbero frastornare coloro che le apprendono dal retto cammino; ma essi debbono considerarsi da chi si vede costretto a

farli, come la sentenza che la legge comanda, ma che il cuor ne soffre.

Ma pria di entrare nell' esame propostoci, l' è ben giusto discorrere alcun poco del motivo, che abbia indotto l' autor del programma a proporlo. E da prima ei dichiara fin dal titolo, che lo destini a *promuovere e comparare i metodi per l' invenzione geometrica*: l' oggetto dunque che vi si propone non è di dare ad alcuno di essi la preferenza, come nella *risposta* si vede malignamente ad ogni passo ripetuto: nè in altro luogo del programma si avverte mai questa preferenza al metodo degli antichi; ma semplicemente, che non si vada all' altro estremo di disprezzarlo, e non istudiarlo come merita. E di fatti tutto il programma ispira lo stesso giusto e nobil sentimento, dall' autor di esso, e nella scuola del Fergola sempre inculcato, di non iscompagnarli, valendosi or dell' uno, or dell' altro, e le più volte a proposito combinandoli, per ottener quella brevità e chiarezza, che da tale ben intesa unione risulta [3]. Nè da ciò mai alcun analista potrebbe dissentire, senza discendere al rango de' risponditori al programma, i quali vorrebbero ridotta, per comodità di loro dottrina, tutta la scienza geometrico-analitica al puro meccanismo di poche formole e trasmutazioni, da pervenire ad un risultamento qualunque [4]. E perchè non manchi ancor qui, sebbene non ve ne sia bisogno, l' autorità di un sommo analista ultimo, ecco

---

[3] Le idee precise del prof. Flauti a questo proposito potranno rilevarsi dalle sue *dissertazioni sul metodo in matematiche*, *sulla maniera di scrivere gli Elementi di queste scienze*, *e sull' insegnamento delle medesime*, da esso lette alla R. A. delle scienze, e pubblicate poi nel 1822, che i contraddittori potrebbero con loro profitto riscontrare originalmente, o almeno leggerle nel ben fatto transunto inserito nel n. 1. della *Rivista generale di scienze, lettere ed arti, an. 1825.*

[4] È al certo ben singolare la pertinacia degli autori della *risposta* in volere, che il programma sia diretto ad abbattere assolutamente il metodo analitico puro;

quella del La Place : » Ce rapprochement de la Géométrie et de l' Al-
» gébre répand un nouveau jour sur ces deux sciences ; les opérations
» intellectuelles de l' Analyse rendues sensibles par les images de

---

nè però noi ripeteremo il già detto fino alla noja , e nel programma ancora , che nò affatto , anzi che ogni metodo si coltivi , ed a proposito si adopri . Ma sono essi ben coloro cho di questo metodo menomano i pregi , dandolo per tanto difficile a chiunque fosse già istruitissimo del Cartesiano , da cui immediatamente deriva ; non facendosi nè meno scrupolo di toglier la suscettività a comprenderlo allo stesso perspicace e sublime ingegno del nostro Fergola , mentre non gli negano un merito distinto negli altri metodi , già tutti per essi antichi, e da bandirsi . Qual vantaggio dunque , se così fosse , l'invenzione geometrica avrebbe da esso raccolto ? E noi potremmo ben loro mostrare col fatto quanto addentro si fosse anche in questo metodo penetrato , nella scuola del Fergola , se il prof. Flauti avesse voluto pubblicare il *Saggio di Geometria analitica di sito* , che dettò per le sue lezioni dell'anno 1828 nella R. U. degli Studj , ove ebbimo il piacere di ascoltarlo . Ma egli stimava allora un tal lavoro ancora imperfetto , e si è finalmente determinato a darlo fuori ora , che dovrà ristampare la sua *Geometria di Sito, ec.* , che se a' sommi matematici non dispiacque fin da che la conobbero dopo il 1815 , più grata dovrà certamente riescir ora, che la rivedranno di molto accresciuta , e liberata da qualche piccol neo , da' quali le opere de' più grandi uomini non vanno esenti .

E se nel programma fu detto , che » questa novella analisi geometrica *ri-* » *dotta ad arte combinatoria* , sottometteva la risoluzione de' problemi al metodo » delle eliminazioni , *il più imperfetto dell' analisi moderna , dal che può talvolta* » *risultare ignoto il grado e la natura del problema che vuol risolversi* « , noi pregheremo i contraddittori a notare le parole , che gli abbiamo a proposito segnate ; le prime delle quali chiaramente indicano ciò riguardare coloro , che con poco discernimento adoperandolo , lo hanno ridotto ad un semplice meccanismo di formole . E per le altre ce ne appelleremo agli stessi contraddittori , i quali non hanno saputo ritrovare miglior risposta di quella di mostrarci , cho alcune volte siesi incorso in equivoco sul grado di un problema, anche trattandolo col metodo antico , e citandoci il già solo e ripetuto esempio della soluzione di Adriano Romano pel problema del cerchio tangente tre altri , cui con molta più ragione potrem-

» la Géométrie, sont plus faciles à saisir, plus intéressantes a suivre.
» Cette correspondance fait l' un des plus grands charmes attachés
» aux spéculations mathématiques «. Ma questo discorso, e l'autorità stessa di un sì grand' uomo è inutile per chi non ha mai gustato il dolce frutto di questa reciprocanza de' metodi, e gli abbia ben conosciuti e praticati.

Bisogna esser bene spensierati, e poco dell' onor patrio curanti, per andar rovistando una letteruccia, occultando il nome di chi la

---

mo noi contrapporre quello de' tre cerchi da iscriversi in un triangolo (*Ved.* Considerazioni *ec.* p. 42) : e che eziandio col metodo Cartesiano si debba talvolta ricorrere alle eliminazioni. Finalmente compiendo la loro apologia, con attribuire a poca conoscenza ne' metodi algebrici, l'essersi detto, che i metodi delle eliminazioni fossero ancora imperfetti adducendo in contrario le ricerche dell' Eulero e del Bezout su tal proposito. Or noi per le prime due cose gli avvertiremo, che se essi le riconoscono come difetti in tutt' i metodi, nell' antico, e nel Cartesiano avvengono in qualche raro caso, mentre nell' analitico puro sempre : e gli soggiugneremo ancora, che in questo sono insiti al metodo, in quelli no, e piuttosto da attribuirsi al manco d'arte e destrezza di chi gli adopra. Riguardo poi a ciò che di nuovo ci producono relativamente al metodo Euleriano e Bezoutiano delle eliminazioni, noi gli avvertiremo ad essere più accorti ne' loro giudizj, ed in simili casi non avventurar mai proposizione, senza prima aver saggiata col calcolo l' esattezza di ciò che proponesi. Ed essi si sarebbero, così regolandosi, convinti, che gli sforzi di questi due valentuomini, e quelli inoltre del Cramer, ed anche del La-Grange, e posteriormente ancor di altri distinti analisti, non sieno assolutamente riesciti a dare generalmente a questo argomento tutta quella perfezione elementare, che richiederebbesi per usarne con tanta franchezza, e per affidarvi assolutamente la soluzione de' problemi geometrici : e gli noteremo ancora, che con que' metodi le equazioni eliminate risultino onuste assai di termini, e però intrattabili per geometriche costruzioni, alle quali per altro que' sommi uomini non miravano, trattando l' argomento per equazioni numeriche. Ed avrebbe pur dovuto a nostri franchi contraddittori far qualche impressione, che que' metodi di eliminazione non oltrepassavano i limiti di due equazioni a due indeterminate,

scrisse, che ben forse vorrebbe ora, se la cosa è vera, non aver mai avventurata a caso una insulsa proposizione; e tutto ciò ad oggetto di trovar appoggio di nuove sciocchezze, per offendere una scuola, che ben da settant' anni ha sostenuto e sostiene il decoro del nostro paese; e che gli ha meritata la distinzione sulle altre. E perchè piuttosto non rammentare a noi altri napoletani que' tanti elogj, che in diverse circostanze gli hanno tributati matematici distintissimi italiani e di oltremonti? E perchè per tutt' insieme questi non ricordarci ciò, che di essa ne profferiva il dotto prof. Majocchi, nella sua *Biografia del Brunacci*, che noi ci faremo un dovere di quì ripetere:
» La nostra penisola (ecco come si esprimeva chi sente amor del
» nome italiano) doveva per gli sforzi uniti di tanti suoi geometri,
» salire fra il numero delle prime nazioni coltivatrici delle matema-
» tiche discipline. In fatti, mentre l' italiano Lagrange promoveva
» in Oltremonti le dottrine tutte dell' analisi, e teneva il primato
» fra i matematici di una delle più dotte nazioni; e mentre Fer-
« gola sulle rive del Volturno diffondeva la sintesi geometrica, for-
» mando una scuola composta dal Flauti, dal Giordano, dal San-
» gro, dallo Scorza, dal Giannattasio, e da molti altri, la qua-
» le riprodusse la gloria geometrica de' tempi di Archimede e di A-
» pollonio . . . .

Vi bisognava dunque esporre in iscena un giovine appena iniziato nella scienza, per distruggere sfrontatamente l' opera di tanti anni, e di tanti distinti uomini, che avevano coperti di gloria i loro tempi, e'l loro paese. E se maggior distinzione ebbe questa scuola sopra le altre per la parte geometrica, non è ciò certamente ragione da menomarne il merito, quasi attribuendoglielo ad ingiuria; che non v' ha matematico distinto, che per quanto valuti e coltivi ragionevolmente l'analisi moderna, non apprezzi però la scienza di Euclide, Archime-

de ed Apollonio, e non desideri da questa veder anche le sue algebriche ricerche comprovate [5]. E notisi che il Lhuilier portò ciò lan-

[5] Non sarà fuor di proposito di qui recare un' analogo luogo della *Rivista Generale di Scienze lettere ed Arti*, che nel 1825 si cominciò a pubblicare in Napoli, ove i dotti compilatori non istimarono altrimenti introdursi all' art. *Matematiche*, che prendendone le mosse dal Fergola e dalla sua scuola; ed ecco in qual modo.« Assai più di un mezzo secolo di vita studiosa ed attiva aveva fatto del pro- » fessore D. Nicola Fergola il primo luminare de' nostri scienziati, che delle teo- » riche della figurabilità o del calcolo formano la loro occupazione prediletta. E » capo-scuola già tutti il salutavano di quella classe de' nostri matematici i quali, » *non per disdegno o ignoranza de' nuovi metodi*, ma per venerazione e cognizione » profonda di quei sottili trovati dell' antica sapienza geometrica, della quale tan- » ta preziosa suppellettile ancor ci rimane, non soddisfacenti appieno le moderne » analitiche forme risguardano, se con la costruzione geometrica, e col rigore de- » gli antichi sistemi di dimostrazione non le veggano pienamente in accordo. Questo » sovrano ingegno, che già impresse nome indelebile nella storia delle scienze che » professava, che ne ravvivò ed alimentò fra noi la sacra fiamma, anche nell'ur- » to di opinioni divergenti, e nella inflessibilità dello spirito di parte, questo lumi- » nare delle matematiche è spento (era morto il 21 giugno dell' anno precedente). » Ma ei rivive ne' suoi valorosi alunni: è immortale nelle sue opere. Hanno sparso » do' fiori sul suo sepolcro la Religione che rendeva intemerati i suoi costumi, e » la scienza che vide per lui dilatati i limiti del suo imperio. Il nostro omaggio alla » memoria di un tanto uomo sarà il fregiare le prime linee del nostro lavoro col » catalogo delle di lui opere ». E sarà piacevole e grato certamente per chi ama il decoro e la gloria del suo paese, e non ne va insulsamente e senza profitto cercando il dispregio, il riscontrare tutto questo articolo, che ha dovuto esser opera di persona saggia ed avveduta, e di cui noi ci faremo un dovere di valercene ancora in appresso. Ma disgraziatamente il nostro paese ricco in ogni tempo d' ingegni distinti, e più della sua gloria amici, non ha mancato, e con dispiacere vediamo non mancare ancor ora, in un secolo nel quale molto più che negli altri sono diffuse le umane conoscenze, de' Bartaloni, de' Cominale, e di altri, che fanno di loro scarsa scienza il modulo da giudicare dell' altrui merito, e delle opere di sommi uomini, che meglio farebbero ad ammirare e tacersi.

to in là, che dolevasi, che mentre l' Algebra si fosse alla Geometria applicata, non si fosse al contrario di questa fatto uso in quella; stimando assai vantaggioso che molte dottrine di essa fossero dalla Geometria confermate [6]. E lo stesso sentimento aveva poco prima manifestato l' illustre La-Grange [7]. Noi non intendiamo di entrar quì in discettazione di metodi, che, per quanto poco valghiamo, nell' uno e nell' altro siamo stati in nostra scuola istituiti, ed entrambi gli apprezziamo ed usiamo a proposito; ma pure ci piace di ricordare un bellissimo parallelo che di tali metodi faceva il peritissimo e laborioso Malfatti, nel suo opuscolo sull' *Ellisse Cassiniana*, che assai preciso e ben espresso a noi sembra: ed eccolo. » Se poi » mi domandate la ragione, perchè potendo con non molto calco- » lo porvi sotto degli occhi questa bella proprietà della *Cassinia-* » *na*, abbia nondimeno preferito il metodo sintetico all' anali- » tico, conducendo il lettore al vero per una strada alquanto più » lunga e poco battuta a dì nostri, io ve lo rendo immediatamen-

[6] » Les mathématiciens modernes, depuis Descartes jusq' a nos jours, se » sont occupés avec soin des applications de l' Algébre a la Géométrie, et leurs » travaux à cet égard ont beaucoup contribué à l' avancement des sciences ma- » thématiques, soit abstraites soit appliquées. Mais il se sont bien moins occupés » de l' application de la Géométrie a l' Algébre. Cependant, on peut aussi quel- » quefois répandre du jour sur les vérités algébriques, et les mettre sous les yeux » par le secours de la Géométrie (*Elem. d' Algébre, Append.*)

[7] » La methode que je vous ai exposée derniérement, pour trouver et dé- » montrer plusieurs propriétés générales des équations par la considération des » courbes qui les représentent, est proprement une espéce d' application de la Géo- » métrie à l'Algébre; et comme cette méthode a des usages tres-étendus, et peut » servir à resoudre facilement des problémes, dont la solution directe serait trés- » difficile ou même impossible, je crois devoir vous en entretenir encore dans cet- » te séance, d' autant plus qu' on ne la trouve guére dans les éleméns ordinaires » d' Algébre. (*Séances des Écoles Normales*).

» te . Voi sapete che molti geometri invaghiti del comodo e della
» fecondità dell' Analisi , e disgustati dalla difficoltà che porta seco
» un edifizio di dimostrazioni sintetiche , vorrebbero esclnder quasi
» affatto la Sintesi da' libri matematici , insinuando incessantemen-
» te , che col servirsi della prima , si va in traccia del vero per
» quella strada , che all'uomo è più naturale e più facile , ove s' in-
» contrano gli esempj più perfetti della maniera , con cui si dee im-
» piegar l' arte del raziocinio , e in cui lo spirito assistito dalla pre-
» senza , e dal maneggio di pochi simboli inventati per esprimer le
» idee , acquista una idoneità maravigliosa allo scoprimento di cose
» incognite , che altrimenti rimarrebber fuori della sua sfera . In
« verità chi si argomentasse di negar il vantaggio sommo , che han
» le forze dell' Analisi sopra quelle della Sintesi , autenticato da
» tanti sublimi ritrovamenti che essa ha prodotti , specialmente pel
» corso del passato , e del presente secolo, nella Fisica , nella Nau-
» tica , nell' Astronomia , nella Meccanica , e nella Geometria stes-
» sa, ai quali la sola Sintesi non avrebbe potuto aspirare , mostran-
» do di non veder la luce sul bel meriggio , si avrebbe ragion di
» credere , che volesse per avventura consolarsi della propria cecità
» ed ignoranza , per via di clamori vani, i quali sarebbero ricevuti con
» compassione o con riso dai matematici . Io ripeterei di un tal
» uomo ciò che dice Cicerone di Epicuro , a proposito de' suoi
» errori nella Fisica : *Quod profecto non putavisset , si Geome-*
» *triam . . . discere maluisset* , e 'l conforterei a diventare mi-
» glior geometra prima di decidere ciò che sia più o men utile al-
» l' avanzamento della Geometria . Si confessi dunque volentieri ,
» che la provincia , sulla quale domina come reina l' Analisi , è
» molto più estesa e più vasta di quella che appartiene alla Sinte-
» si ; ma non s' inferisca da tal preminenza , che l' altra debba-

» si abbandonare, l' altra tanto benemerita e per tanti secoli della
» Geometria antica, che serve anche oggidì all' Algebra medesima
» di util compagna, massimamente per le preparazioni de' proble-
» mi, e negli Elementi di Euclide è stata ed è il fondamento e la
» base di tutta la Matematica. Giova pur moltissime volte a di-
» mostrare una verità con un' estrema eleganza, ed arriva a scio-
» gliere non pochi problemi con brevità e nitidezza, laddove fa-
» cendo uso dell' Algebra converrebbe ingolfarsi in lunghi e nojosi
» calcoli, prima di arrivare a conoscere il valore di un' incognita,
» il quale bene spesso si presenta sotto un' ispida forma di frazioni,
» e di termini vincolati da segni radicali, che guidano il geometra
» ad una intralciatissima costruzione. Ed anco quando conduce per
» una serie di proposizioni, prima che si enunzj o si dimostri il teore-
» ma finale, io vi trovo pure il suo buono; e rassomiglio queste pro-
» posizioni precedenti a quelle comode e gioconde stazioni, nelle
» quali tratto tratto si riposa un viaggiatore, che vuol pur giugnere al
» luogo che si è prefisso, ma nello stesso tempo vuol pigliar lena,
» ed osservar senza fretta tutto il bello che incontra per via. L' ana-
» lista al contrario, ove si tratti d' indagini non molto sublimi, è
» presso a poco un viaggiatore, che si chiude in un carrozzino, e
» lasciandosi guidar dritto dal meccanismo de' suoi calcoli, senza
» quasi trovarsi obbligato ad alcuna attenzione, non ismonta, se
» non quando è arrivato al termine del suo viaggio. Questi arriva
» alcune ore prima dell' altro, se la meta è comune, ma certa-
» mente ha veduto meno. Checchè ne sia, a me sembra incontrastabi-
» le, che le dimostrazioni della Sintesi, essendo ordinariamente più dif-
» ficili di quelle dell' Analisi, siano atte ad esercitar sempre più lo spiri-
» to accostumandolo ad una maggiore applicazione, ed a fargli con-
» trarre un abito di pazienza e di ostinazione, senza le quali avvien

» di rado che si scoprano di grandi cose . Quindi è , ch' io racco-
» mando a' miei uditori di tenere una sentenza media tra quelli che
» vorrebbero che si dimostrasse ogni cosa per Sintesi , e gli altri che
» schifano tutto ciò che non è specie algebraica ; e soglio ricordar
» loro , che il più grande analista della sua età , l' inventor dal me-
» todo delle flussioni , in una parola il gran Newton doleasi so-
» venti volte col Pemberton , di non aver posto maggiore studio
» nella lettura degli antichi geometri , e disapprovava altamente che
» la Sintesi restasse a' suoi dì trascurata «.

Noi speriamo, che ci sarà condonata questa lunga ripetizione di un luogo del Malfatti , in grazia della chiarezza e distinzione con cui vi sono rappresentati i due metodi , e degli utili precetti intorno al coltivamento ed uso di essi : tanto più che rileviamo dalla *risposta* del giovane Padula , che la sicurezza, con la quale egli ripete ogni proposizione ispiratagli , deriva dal non essersi mai imbattuto in altra lettura , che in quella de' suoi soli maestri. Ma pure ancor da questi avrebbe potuto trarre materia da non alzare tant' alto la voce contro la Geometria antica , che ben si vede non aver egli nè men da lontano riguardata , e contro ogni coltivatore di essa , gridando all' interdizione ; poichè non par che avesse potuto siffatta insufficiente maniera di giudicar de' metodi ricavare dall' istruzione che gli è stata data , mentre troviamo , che il chiarissimo professore Tucci , suo principale maestro , in un opuscoletto , che col titolo : di *Osservazioni sul problema della piramide triangolare* [1] , nel 1823 dirigeva ad istruzione de' suoi allievi , teneva ad essi tutt' altro linguaggio , e la discorreva da persona intelli-

[1] Quello cioè di : *Costruire una piramide triangolare , dati i lati della base , e gli angoli al vertice.*

gente ne' metodi, ne' quali era stato ben diretto in quella scuola, cui ora si cerca adontare. Di fatti egli ivi diceva: che volendo determinare il vertice di tal piramide, riguardandolo come l' intersezione de' segmenti circolari descritti su' lati della base di essa, capienti respettivamente gli angoli al vertice della medesima, facendo rivolger quelli intorno alle loro basi, seguendo le considerazioni del Monge » [9] *rapportandone il vertice a tre assi coordinati, aumen-* » *terebbesi prodigiosamente il grado dell' equazione finale,* » *introducendovi de' fattori inutili* «. E continuando un ragionamento puro geometrico, conchiudeva »: *dunque il metodo indicato in-* » *trodurrà fattori estranei alla quistione proposta nella di lei* » *equazione finale*. Inoltre soggiugneva: [10] *Se adoperando il meto-* » *do ordinario delle coordinate fosse possibile di ottenere l' e-* » *quazioni razionali de' soli tre nappi necessarj a considerarsi,* » . . . . » *si riporterebbe il problema alla sua classe genuina. Ma tut-* » *to questo non è che un bel dire* (e ne indica le ragioni, con- » chiudendo). *Adunque la generalità stessa de' metodi algebrai-* » *ci, tanto preziosi sotto altri rapporti, è la cagione di que-* » *sto inconveniente, se così ci è permesso chiamarlo, ed al* » *crescer dell' una, più grande addiviene ancor l' altro* «. E proseguendo sempre a ragionar su tal proposito, finisce per conchiudere. » *Quegli adunque, che ad ottener l' intento voglia per* » *massima limitarsi all' uso delle coordinate, rigettando ogni* » *altra specie di determinanti, può benissimo accadere che non* » *adopri il metodo più semplice, quello cioè che conduce al-* » *l' equazione del minimo grado.*

» [11] *Nè ci si opponga che allorquando la proprietà caratte-*

[9] n. 2. [10] n. 3. [11] n. 5.

» *ristica del punto dimandato non può facilmente tradursi in » equazione mercè l' uso delle coordinate, tentar si possa di » tradurne alcun' altra, che da quella dipenda, e meglio si » accordi al metodo delle coordinate: poichè ammettendo in » generale la possibilità della cosa, osserveremo, che appunto » nel surrogare alla proprietà caratteristica altra che ne deri- » va, può succedere che la natura del problema venga insen- » sibilmente ad alterarsi; e basta perchè ciò avvenga, che la » proprietà derivata sia alcun poco più generale della caratteri- » stica, di tal che esister possano de'punti ai quali appartenga la » prima e non la seconda. Ciò è tanto vero, che alcune volte nel » momento stesso che si scrive l' equazione fra le coordinate di » un punto idoneo al risolvimento del problema, si conosce che » la medesima appartiene ancora a punti che risolver nol posso- » no; segno evidente che il mezzo prescelto a determinarlo, quel- » lo cioè di riferirlo a rette fisse per via di coordinate ad esse pa- » rallele, non è il meglio appropriato, o se così voglia dirsi, non » è quello che esclusivamente appartenga a'soli punti che risolver » possono la quistione. In questo caso più che mai evitar biso- » gna l' uso delle coordinate ordinarie*, SE DAR NON SI VOGLIA » NEL FALSO " «.

» [13] *Il problema della piramide ci offre un bell' esempio di*

---

[12] Nel *n.* 13. di questo suo lavoro, dopo varie analitiche considerazioni, che riescon facili e chiare, quando si hanno innanzi le soluzioni già da altri fatte di un problema; ma che il caso stesso presente dimostra, che con tutta l' *attenzione sufficiente* non si ravvisano, quando siesi privi di tal vantaggio, così ripiglia il nostro prof. Tucci: » *Non rechi maraviglia, se dopo esserci trattenuti a dimostrare ne' n. 4 e 5, che sarebbe ad un tempo* ridicola e malagevole *impresa il voler applicare, qual panacea universale, il metodo delle coordinate a qualsivoglia ricerca geometrica* . . . . . . — [13] *n.* 6.

» *quanto abbiamo detto* . . . .

Il prof. Tucci adunque riconosceva, e confessava più che l' autor del programma i difetti del *metodo delle coordinate* ; il quale non ha certamente cambiato natura con lo scorrer di sedici anni , sebbene in questo intervallo di tempo si fosse non poco perfezionato [14]. Come dunque ora , nella *risposta* del Padula , si vede mutar sentimento , e prender ogni detto dell' autor del programma a questo proposito , anche con assai più moderazione , per un' eresia ?

La presente circostanza ci ha condotti su questo problema della piramide , interamente alieno dal programma ; se pur non vogliasi riguardar come essenziale ad esso la noterella n. 2 , ove il costui autore qualche cosa accenna sulle ricerche dell' illustre La-Grange intorno la piramide triangolare , ripetendo ciò che aveva pur detto altre volte , cioè dover la moderna Geometria analitica a questo sommo analista le prime sue mosse indicate in tal circostanza [15] ;

---

[14] Nel vol.III. degli Atti della nostra *Società Pontaniana*, pubblicato nel 1819 vi è inserita una memoria di questo stesso professore, nella quale risolvonsi diversi problemi geometrici , tutti per altro trattati ripetutamente in nostra Scuola ; e vi si loda a cielo il metodo degli antichi nel seguente memorando modo.»Il problema di » cui sono per occuparmi consiste in *adattare una tangente comune a due date cur-* » *ve coniche*. Con le risorse dell' analisi moderna potrei dargli ben tosto una solu- » zione applicabile ancora a due curve di genere qualunque ; ma non avendo altro » scopo , se non che di rinvenire un metodo facile , onde *graficamente* condurlo a » fine , qualora si restringa alle curve coniche, giudico dover seguire in preferen- » za l' analisi degli antichi geometri , come quella che ravvicinando insieme assai » meglio dell' Algebra moderna le proprietà individuali delle figure intorno alle » quali si versano le quistioni , conduce naturalmente a risultati più semplici « . O dunque coloro che hanno risposto insolentemente al programma non hanno scienza certa , o pur le loro dicerie non sono sincere : e l' una cosa disdice al buon professore , l' altra all' uomo dabbene .

[15] Ci spiace che da ciò fosse stato il Padula indotto a dire un tal metodo *La-*

le quali poi ripigliate dal distinto geometra francese Monge, ben più anni dopo, cominciarono ad apparire in forma metodica, e quasi che elementare ne' ***Feuilles d' Analyse appliquée a la Géométrie***, ch' egli pubblicava nel 1795, in cui fu eretta in Parigi la *Scuola Politecnica*, nella quale insegnava. E da ciò comunemente a costui, ed al Lacroix, che seguillo da vicino, attribuivasi tal nuovo travestimento dell' Analisi Cartesiana, applicata a' problemi determinati: che ben prima in ricerche indeterminate, o meccaniche se ne trovava fatto abbondante uso dal Cramer, dall' Eulero, e da altri distinti matematici. E deesi pur osservare, che dopo quella prima spinta non vedesi mai più il La-Grange appigliarsi ad essi, in altre ricerche geometriche di simil natura, e nè meno nel trattare, quattro soli anni dopo, il problema *del cerchio e de' tre punti*, pel quale forse pensava, come poi dopo ne dichiarò il Lhuilier [16].

Or coloro che han diretto il Padula nella risposta sonosi assai tenacemente attaccati a questa noterella, credendo trovarvi materia conducente ad acre censura; e noi però non possiamo fare a meno di scorrervi ancor sopra ragionando. E da prima gli avvertiremo, volendo essi censurare, principalmente lavori di uomini distinti, e da gran tempo conosciuti, ed apprezzati nel loro paese ed al di fuori, e che non avventurano inconsideratamente proposizioni, d' informarsi delle loro opere, e studiarle. Certamente che allora non avrebber trovato, che l' autor del programma avesse mai nulla igno-

---

grangiano, che così assolutamente detto, piuttosto risveglierebbe l' idea del *Calcolo delle Variazioni*: e si noti che non mai, per quello ch' egli l' intende, il La-Grange vi pretese, sebbene a' suoi tempi si attribuisse a Monge e Lacroix.

[16] *Elem. de l' Analyse géométrique*, ec. Vegg. anche – *Considerazioni generali su i quesiti al programma*, a pag.32.

rato di ciò che concerneva la natura di questo problema, e quanto su di esso erasi dal La-Grange, e da altri sommi matematici operato. Che anzi avrebbero avuto ragione di consolarsi, che fin dal 1800, avendo quello composti gli Elementi di *Geometria Descrittiva*, prima istituzione di questa scienza, che fosse apparsa in Italia, i quali insegnavansi pubblicamente nelle scuole del Genio e di Artiglieria in Castelnuovo, vi avesse con ragionamento geometrico fissata la natura di tal problema, distinguendone i casi. E come che le tracce della soluzione analitica, ch'egli ne indicava *in nota* (mentre sarebbe stato ben fuori luogo il trattar quest' argomento con metodi algebrici in quell' opera elementare, secondo la giovanil maniera di pensare del sig. Padula) corrispondevano esattamente al grado per l' equazione di esso, che da considerazioni geometriche era stato stabilito, non è però maraviglia se egli, che cercava solamente del problema una costruzione grafica, non fosse proceduto più oltre [17]. Nè poteva per allora, ed ancor dopo, quando furono pubblicati quegli Elementi in Roma, far menzione alcuna di ciò, che relativamente a tale oggetto erasi di slancio accennato dal La-Grange in una sua lezione alle *Scuole Normali* di Parigi; mentre un tal libro a quell' epoca non era ancora pervenuto in Napoli; e chi conosce il nostro stato di allora ne sarà ben convinto. Ed avrebbe dovuto ben più recar ad essi maraviglia, che il Monge, contemporaneamente al La-Grange, insegnando nella scuola stessa, ne elevasse il grado al 64°. [18]

---

[17] Qual fosse lo scopo del prof. Flauti in tal ricerca, e come vi mirasse, il dimostra anche chiaramente la seconda soluzione *ad manuum operationes accomodata*, ch' ei vi reca. --Vegg. anche sul proposito le sue *Osservazioni sulla Memoria del Lhuilier*, nel vol. 2. degli Atti della R. A. delle scienze.

[18] Il sig. Hachette corresse un tal equivoco nell' edizione della *Geometria descrittiva* del Monge, che fu pubblicata con suo supplemento nel 1811.

Che più avrebber dovuto essi conoscere, che quel distinto professore, non perdendo di mira un tal problema, ne ripigliava poco dopo le tracce nella dotta Memoria geometrica sulla *Piramide triangolare*, che la nostra R. A. delle Scienze inseriva nel vol.I. de' suoi Atti [19]; e contemporaneamente nell' egregio trattato *Geometria di Sito sul piano e nello spazio*, che pubblicava in Napoli nel 1815; il quale se ha meritato di esser letto, e molto valutato da sommi matematici stranieri, potevano ben degnarlo ancor essi di leggerlo. E da questo prese occasione il Lhuilier, uomo consumato nella scienza, ed assai sperimentato ne' metodi di essa, ad inviargli la sua analitica soluzione elegantissima di tal problema, che vedesi inserita nel vol. II. degli Atti stessi, accompagnandola di compitissima lettera, che noi, ad onore sommo del nostro paese, ci crediamo in dovere di quì testualmente recare:

Genève 16 avril 1819 — Monsieur — » Votre lettre datée » du 16 octobre 1816 m' est parvenue seulement en juillet 1818. » J' ai éprouvé les suites des détours nombreux qu' elle doit avoir » faits, principalement par le retard de la réception du bel ouvra- » ge qui l' accompagnait.

» J' ai lu avec empressement ce beau monument géométri- » que qui méritera la reconnaissance de tous les amateurs des bon- » nes méthodes; il est un recueil precieux, que doivent étudier les » jeunes géométres qui cherchent à acquérir les véritables bases de » la science. La marche graduée que vous suivez, en passant des » objets les plus faciles aux parties les plus relevées, est bien pro- » pre à les former à l' esprit d' invention. Agréez, Monsieur, les » expressions de ma reconnaissance pour ce beau cadeaux . . . .

[19] Un tal lavoro fu presentato all' Accademia all' incirca il 1808.

Ed in questa sua Memoria, il dotto matematico di Ginevra, dopo breve storia di tal problema, e degli equivoci presi circa la natura di esso, conchiude: » Faut-il donc que même dans une science, » dont l' évidence des principes, et la simplicité de son objet doivent » garantir l' esprit humain de tout écart dans la route de la vérité, » il doive encore conserver quelques doutes sur la certitude des ré» sultats auxquels il parvient; et que celà ait lieu même dans un » cas, ou il n' y a qu' un petit nombre de chainons intermédiai» res entre le principe et sa derniere conséquence; et qu' il reçoive » ainsi une triste leçon d' humilité? E noi poniamo innanzi al Padula questa bella massima, perchè ne profittasse nella sua intrapresa carriera; poichè siamo persuasi, che il suo genio inventivo non gli permette di sostener la lettura di autori originali di nostra scienza, nè antichi, nè moderni. Che se egli per poco avesse gettato lo sguardo su questa Memoria del Lhuilier, diventata un prodotto nazionale, e sulle osservazioni aggiuntevi in fine dal nostro professor Flauti, non si sarebbe avvisato certamente di ammassare tanti errori e contraddizioni nella critica male a proposito, e fuori luogo da esso avventurata. Ed avrebbe anche avvertito, che questo nostro professore traeva da ciò argomento da costituire un nuovo genere di problemi, che appositamente denominava *complessi*; e così veniva a togliere ogni inconvenienza, che in tal problema, come in altri del suo genere, ravvisasi tra il loro grado ed il numero delle soluzioni; sicchè dalle sue diverse considerazioni la scienza geometrica raccoglieva qualche vantaggio.

Inoltre dalle ripetute ricerche da esso fatte sul medesimo problema, ne derivava un'elegante soluzione geometrica del nostro professore Scorza [10], e l' altra algebrica del sig. Maresca, escito dalla no-

[10] Vegg. la sua *divinazione sulla Geometria analitica degli antichi.*

T

stra scuola, cui è stato non ha guari tolto [1]; ed ancor più la trasmutazione in forma generalissima, e la corrispondente soluzione geometrica eseguita dal prof. Bruno, che il prof. Flauti presentò alla suddetta Accademia, la quale gli diede luogo ne' suoi Atti dopo quella del Lhuilier, insieme ad altre analoghe ricerche sullo stesso argomento, che hanno formato e formano oggetto di considerazioni importanti de' moderni geometri ed analisti [2]. Finalmente doversi a questa ricerca del prof. Bruno il più bello analitico lavoro su tal problema generale, di uno de' principali matematici moderni francesi, di ugual valore nel coltivare i due metodi, il sig. Hachette, che da costui inviato al prof. Flauti, vedesi inserito nel vol. III. degli Atti medesimi.

Tutto il fin quì detto basterebbe a mostrare, che ciò che dall' autor del programma siesi fatto su questo principal problema, tra quelli che il La-Grange ne accenna sulla piramide triangolare, non sia stato tenuto a vile da distinti matematici. Ma a far meglio intendere la di lui mente, non ben capita da' contraddittori, sarà bene spiegargli, che le ricerche di quel sommo analista su questo ar-

---

[1] Vegg. lo scolio in fine della sua raccolta di problemi pubblicata nel 1825, dalla Stamperia Reale.— Non abbiamo osato attribuire ancora alla spinta data alla trattazione di questo problema dal prof. Flauti, le *osservazioni* su di esso dal sig. Tucci pubblicale nel 1823.

[2] Tra queste ci limiteremo a notare il seguente problema: *Di un dato triangolo rinvenirne tal posizione nello spazio; sicchè la sua projezione sopra un piano risulti un triangolo dato di specie*, di cui veggonsi diverse soluzioni, e con diverso metodo elaborate da distinti geometri, tra' quali il Lhuilier, nel vol. II. degli *Annales des Mathématiques* anno 1812. E di esso già il caso, che la projezione fosse un triangolo equilatero, risoluto elegantemente dal sig. Baduel, fu fatto inserire dall' Hachette nel vol. 2. della *Correspondence sur l' École polytechnique* an. 1809, e ei è stato poi non ha guari ripetuto dal sig. Padula, nella sua *Raccolta di problemi*.

gomento, sebben degne di un tanto uomo, e della forza grande di astrazione alla quale sapeva egli elevare ogni cosa che sottoponesse all' analisi algebrica, la quale era una leva potentissima nelle sue mani, ma che si spezza facilmente nelle altrui, non erano però tali da fargli conseguire lo scopo geometrico che si avea prefisso, e che egli annunzia come di grande importanza, cioè di compiere le dottrine geometriche sulla piramide triangolare, elemento de' solidi poliedri, in modo da stare al pari con quelle elementari stabilite pel triangolo rispetto a' rettilinei. Egli è vero adempir esso sublimemente all' oggetto di connettere insieme tutte le quistioni, che su tal piramide possonsi proporre, stabilendo un' equazione generale di condizione tra' suoi lati, che ne sono gli elementi principali: ma la stessa sublimità di questo analitico lavoro offende la qualità elementarissima di talune di esse, che dovrebbonsi da principj troppo alti ripetere, mentre da geometriche considerazioni facilmente ottengonsi. Nè poi i risultamenti di ciascuno di que' problemi geometrici individuali vedesi ridotto in equazione propria, e con le note caratteristiche di quelle quantità da cui la soluzione dee dipendere. Rimarrà dunque questo sublime lavoro dell' insigne La-Grange degno sempre dell' ammirazione degli analisti; ma non risulterà di alcuna utilità alla Geometria, la quale sacrifica ben a proposito questo comprender in una soluzione un numero di quistioni, a quello di assegnarne separate soluzioni, semplici, definite nella lor natura, e facilmente riducibili ad uso. Che però a questo solo riguardo noi dimanderemo per l' autor del programma, che da' severi contraddittori gli sia condonato quel paragone da lui appena accennato in fine di quella noterella, e che essi gli hanno attribuito ad enorme bestemmia per non ben intenderlo [*3].

[*3] Si potrebbe a questo caso con più ragione applicare ciò che dice il Brunac-

Circa poi l' asserirsi francamente nella *risposta*, che non sia problema di pura Geometria quello trattato dal La-Grange, di: *determinare la congiungente i vertici di due piramidi triangolari, messe su di una base comune*, e che il sia poi solamente quello di: *assegnare la piramide triangolare di massima solidità date le quattro facce*; e però escludendo ancora dall' esser geometrici problemi quelli dell' *iscrizione*, o *circoscrizione della sfera ad una data piramide triangolare*, non che altri di simil fatta, noi ci confessiamo storditi da tanta novità: nè dopo ciò ci fa meraviglia, che i risponditori non abbiano ravvisata alcuna correlazione di problemi sulla piramide, tra quelli indicati dal La-Grange per oggetto del suo lavoro, e gli altri geometricamente risoluti dal professor Flauti.

Rivenendo ora da questa inevitabile lunga digressione, eccoci al luogo della *risposta*, che riguarda le proposizioni censurate al sommo e mitissimo uomo, che tanto ha onorato il nostro paese, e la memoria ancor l' onora, nel di lui egregio trattato delle *Sezioni Coniche analitiche*, che miglior consiglio sarebbe stato pe' contraddittori di più attentamente studiarlo, potendone ritrarre grandissimo profitto, per rettificare le loro irregolari conoscenze de' metodi. E primieramente conviene stabilire, che un tal trattato fu dal sagacissimo autore pubblicato nel principio dell' anno 1814, alla quale epoca il metodo delle coordinate era assai più imperfetto. Convien pure far

---

ci, al proposito del paragone che fa del sublime lavoro analitico del La-Place *sulla dottrina dell' attrazione capillare*, con l' elementare geometrico del Pessuti, conchiudendo la sua prima Memoria su questo argomento col dire: » Il merito del nostro italiano il Pessuti, sta in questo, che preso il pensiero stesso del La- » Place, ha potuto colla semplice Geometria fare dopo di esso tanto, quanto » aveva fatto questo geometra con l' analisi, così detta, infinitesimale «.

loro osservare, poichè da essi medesimi non l' hanno avvertito, e nè men l' hanno voluto credere all'autore stesso, che chiaramente lo dice nella breve prefazione, che sebbene le ricerche in esso contenute sieno fatte col metodo geometrico-analitico, pure l'orditura n'è sintetica: la quale circostanza non dovrà far loro giudicare di una proposizione staccata, scordando il nesso necessario, che questa abbia con le altre ancor necessarie ad una compiuta istituzione. Sicchè quando vogliasi istituir paragone tra ricerca e ricerca, tra dimostrazione e dimostrazione, non deesi, nel metodo usato dal Fergola, tener conto di ogni proposizione incidente, come se fosse a questo solo uso destinata. Certamente, che uno il quale esaminasse alla maniera de' contraddittori la dimostrazione della 31.El. III, vi noterebbe l' uso di tre principj geometrici che vi abbisognino, dimostrati nelle prop. 5 e 32 lib. I., e 22 III. Ma tali verità già dimostrate, e quindi passate in assiomi, sono necessarie da loro medesime, e non lemmi della 31. E similmente sarà semplicissima la dimostrazione, o la ricerca geometrica della *polare* per un punto qualunque preso in una sezione conica, mentre essa non dipende che dal solo principio della divisione armonica [24], ch' è importante proprietà, per le curve coniche, anche a parte di questa ricerca, da doversi però in ogni istituzione di esse inserir necessariamente. Che però non troviamo esatto ciò che il prof. Tucci dice, nel suo opuscolo sul problema *di una curva conica e tre punti*, che, *per dimostrare quell' importante ed utilissima proprietà con le risorse della sintesi*, *ben molti teoremi preliminari si esigono*. E si avverta, che quì ci fa l' onore di citare come eccellenti le i-

---

[24] Veg. le *Sez. Con. illustrate dal Giannattasio*, 16. I. 20. II. 32. III.

stituzioni dal Giannattasio prodotte [5], che ora ad un tratto hanno da lui demeritato, e sono dannate all' ostracismo dalle scuole. S' egli considera per tal ricerca anche le verità, che man mano retrogradando bisognano, per pervenire a dimostrare la proprietà della *divisione armonica*, delle quali nè si vede, nè si dee veder traccia, usando il metodo geometrico, nella dimostrazione di quella locale, siamo ben fuori quistione: ma allora la Geometria avrà ben ragione di rivalersene su tutto quel treno retrogrado, che vi bisogna, per istabilire l' equazione alle tangenti, essenziale per una dimostrazione analitica col metodo delle coordinate; ed anche di più le altre ch' egli vi combina: ed allora non sapremmo da qual lato, a parte della chiarezza del metodo geometrico, stia la semplicità. Le dimostrazioni delle verità geometriche ordite con quel metodo divengono però semplicissime, e quasi intuitive, nel caso che sieno immediata conseguenza di una proposizione già dimostrata; così l' è, per un esempio, quella dell'angolo assintotico nell' iperbole parilatera o scalena, essendo la qualità di esso un' immediata conseguenza della 5, o 19 e 32 El. I. applicate alla definizione di tali specie d' iperboli: nè certamente qualunque dimostrazione vi si voglia recare per mezzo dell' analisi algebrica, potrà stare a fronte dell' intuizione geometrica. In somma per discorrerla noi quì sul piede stesso del dotto ragionamento del Malfatti più sopra recato, diremo, che le ricerche fatte con metodo geometrico sono, individualmente considerate, come quel piccol tratto di salita, che un viaggiatore dee continuar a fare, dopo averne già percorso uno, ancorchè lungo, che gli era però necessario per osservare passo a passo

---

[5] Lo stesso linguaggio aveva già tenuto nella Memoria inserita negli Atti della Pontaniana. (*Ved. not. a pag. 134.*)

nuove cose, e nuove vedute, le quali sempre presentavangli un' orizzonte vasto e piacevole; mentre le identiche fatte con l' analisi algebrica posson paragonarsi a colui, che ogni volta che vuol montare a più erto luogo, discendesse al piano, per indi per ardua e non segnata via là pervenire, ove giunto pur vede lo stesso, ma con meno chiarezza e soddisfazione de' suoi occhi: ed è tante volte obbligato a rifar da capo una simile operazione di cammino, per quante nuove vedute vuol proccurarsi. Il primo è vero ha percorso una più lunga via, ma di essa ha tratto profitto ad ogni passo, ed ha trovata sempre aperta la strada a salir più alto; l' altro ha dovuto per ogni volta riprender da capo il cammino, e scender tanto più basso prima di salire, quanto più il metodo analitico dal sintetico si è voluto disgiugnere; e tanto meno sicuro è pure il cammino che vi tiene, e chiaro l' orizzonte su cui perviene. Ecco il vantaggio del metodo geometrico nelle esposizioni elementari; ed ecco perchè da esse gran frutto si è ricavato e si ricava per la istituzione della gioventù, cui avranno un bel dire i contraddittori in voler persuadere la cosa a lor modo, come conchiudesi nella *risposta* del Padula, quando, se non voglia starsi a ragionamento, il fatto tutto giorno prova il contrario: ed ancor da essi, mentre si asserisce una cosa, se ne sta praticando un' altra, non conoscendo noi una istituzione di giovani puramente condotta con metodo pretto analitico, nè credendo che se ne possa affatto dare.

Ma che diremo delle due proposizioni impudentemente censurate al Fergola! Deploreremo la ragione de' nostri tempi, e del nostro paese, in cui anche nelle Matematiche si parla senza riflettere, e con tal presunzione, che nè meno induce in qualche sospetto di equivoco preso l' avvertimento di un grand' uomo, anzi questo stravolgendolo gli si rivolve contro ad ignoranza,

La prima proposizione censurata l' è quella della nota n. 1. al §.40., in cui il Fergola, dopo aver assegnata col metodo Cartesiano l' equazione al problema della tangente l'ellisse in un punto, che non istia nell' asse prolungato, espressa da

$$h^2 (v^2 - a^2) = c^2 (v - b)^2 \ldots \text{II}$$

la paragona con l'altra

$$(a^2 h^2 + c^2 b^2) x^2 - 2a^2 c^2 bx - a^2 (h^2 - c^2) = o$$

che rappresenta la stessa ricerca pervenendovi col metodo delle coordinate, rilevandola dalle ordinarie istituzioni di Geometria analitica di quel tempo, che nessuno oserebbe negare esser meno semplice di quella, e di più difficile costruzione. Intanto i dotti censuratori han gridato e gridano essersi egli ingannato; poichè ben potevasi ottenere con questo metodo la stessa sua più semplice equazione. Or noi gli osserveremo solamente, che quando il Fergola tratta un tal problema non suppone conoscersi dell' ellisse, che semplicemente l' equazione per gli assi, e nulla ancora de' diametri conjugati, come avviene nel caso loro: come dunque essi vogliono istituir paragone tra due equazioni rapportate l' una al sistema degli assi, l' altra a quello di due diametri conjugati, e quando non ancora conoscasi l' equazione alla tangente, che essi arbitrariamente suppongono già stabilita. E se essi non leggessero i libri aprendoli a caso, ed a salti, ma vi considerassero sopra, come si esige per ben intenderli, avrebbe pur dovuto dar loro qualche pensiero il trovar detto, nella conchiusione di quel paragrafo. » E queste due cose « (cioè i valori della v ricavati dall'equazione II, e l' esibizione geometrica de' medesimi, che sono le radici di questa) » potrebbonsi comodamente tralasciare, perchè assai note, e perchè il medesimo problema per la » teorica de'diametri più giù risolvo «. Ed allora riscontrando il §.95. avrebbero trovato, che dimostrata comune a due semidiametri conju-

gati la stessa proprietà della sottangente rinvenuta per l' asse, ben semplice risultava, come per questo, l'assegnazione della tangente tirata all' ellisse, per un punto qualunque fuori la curva, rapportandolo al diametro che passi per esso; la qual cosa egli poi espressamente dinota nel §.96. Ed a loro norma di civil condotta avrebbero quivi avvertito, quanto studio adoperasse il Fergola, in onorare la memoria del nostro concittadino Antonio di Monforte, che fu tra' primi coltivatori dell' Analisi Cartesiana in Italia, stimando egli sol degna cosa, e lodevole l' accrescer riputazione al proprio paese; e non già, come nell' attuale circostanza si è operato, di andar sofisticando le più impertinenti, e sciocche maniere, per vilipendere il merito di coloro, che sono stati giustamente sempre tenuti in altissima stima. E se Apollonio, tutto che fosse il *gran geometra*, meritò taccia di arrogante presso l' antichità, per aver solamente detto, che Euclide non poteva perfezionare il *luogo alle tre e quattro rette*; e che al contrario fu costui molto onorato, perchè rispettosissimo mostravasi, ed amorevole verso chiunque coltivava le scienze matematiche: che dovrem dire, a' nostri tempi, di un giovine principiante, che fa valere la propria ignoranza in offender coloro, da' quali sarebbe miglior consiglio l'istruirsi.

L' altra mal fondata critica è caduta sulla nota al §. 71, nella quale passandosi per sopra alla prima cosa che accenna il Fergola, circa l' evidenza presso che intuitiva della dimostrazione dell' assunto, ch' ei ne reca col metodo Cartesiano, rimpetto a quella con l' altro a due coordinate, si trascorre in tacciare la difficoltà, che colui indica in tradurre in linguaggio geometrico l' equazione algebrica

$$\frac{q}{p} = -\frac{c^2}{a^2} \times \frac{m}{n}$$

a cagione del segno —, che affetta l' un de' membri di essa. Su di che i censuratori presentano una tale spiegazione, che certamente

doveva esser ben nota al Fergola; poichè anche il nostro italiano Collalto l' aveva più chiaramente espressa nella sua *Geometria Analitica* pubblicata fin dal 1806: ma essa non distrugge affatto ciò che avvedutamente il Fergola notava, e che noi ora ci facciamo un pregio di ripetere con le stesse sue parole: » La Geometria non » conosce grandezze negative; e gli analisti nè pur son paghi delle » nozioni, che ne hanno «. E la trasformazione che da loro aggiungesi essendo una manifesta petizion di principio, lungi dal favorire l' assunto propostosi, contribuisce anzi a confermare la proposizione del Fergola. Ma non è questo il luogo proprio da estendersi in più particolari su tale argomento, pel quale ne sarà convenientemente trattato, or che la cosa mostra esigerlo, nelle note alla nuova edizione, che sta eseguendosi, delle *Sezioni Coniche analitiche* del Fergola.

In quanto poi alla costui soggiunta: » Ed io m' immagino, » che da cotali chiaroscuri di scienza sia nato ciocchè leggo con » mio duolo in alcuni di cotesti corsi analitici replicatamente, che *sia-* » *vi relazione costante tra gli angoli che formano con l' asse* » *maggiore le corde menate da' suoi estremi ad un punto della* » *curva* «; passandosi da rapporto di linee trigonometriche a quello de' loro angoli corrispondenti, ed erroneamente, non avendo ciò luogo: di che avrebbe potuto pur farneli elementarmente chiari la supposizione, che il punto cui vanno quelle corde fosse l' estremo dell' asse minore, nel qual caso risulta evidentemente reggere tuttavia l' anzidetta ragione tra quelle linee trigonometriche disuguali, mentre gli angoli corrispondenti divengono uguali; ecco ciò che dobbiamo ricordare. Il Fergola, allorchè pubblicava una tale sua opera, teneva presenti quelle sole poche istituzioni di Geometria col metodo delle coordinate, che a quell' epoca erano uscite alla lu-

ce, tra le quali quella del Biot [16], ove a parola osservasi il luogo da lui sì modestamente notato; e lo stesso equivoco avvertiva in altra simile opera stampata ad uso della gioventù che istruivasi nelle matematiche in un nostro pubblico stabilimento, nella quale, dopo l'avviso del Fergola si vide dall'accorto autore, corretto: che però questo non riescì inutile. E sol ci spiace, che ancor dopo ciò, in altra più recente istituzione francese tradotta da un nostro professore ad uso di sua scuola, siesi per inavvertenza lasciato correre lo stesso errore.

---

[16] *Ediz. 2. del 1805.*

NUM. I.

Analisi critica della soluzione del problema del Cramer esteso alle curve coniche, pubblicata in Napoli dal prof. Tucci in giugno 1818.

Questo nostro professore, dopo una breve storia di tal problema, di cui ne eleva la difficoltà niente meno che al pari di quello *delle quattro rette*, ripiega subito per esso a considerare le sole algebriche soluzioni, che se n' eran date. E prima di tutte presentandoglisi innanzi quella del La-Grange, ne dà » *i risultamenti* (cioè l' equazione finale), *per così lunghi e complicati, che il sig. Lexell, in una sua memoria scritta di proposito, dopo averne costruiti due in 14 pagine in 4, abbandonò, quasi disperando, la costruzione del terzo* «. Che si paragoni un tal ragionamento del prof. Tucci, con quello che ora ne fa dire nella *risposta al programma*; e si giudichi se questa vaghezza di opinioni opposte sullo stesso soggetto sia degna di chi professa scienze esatte, e v' istituisce molta gioventù. Dopo ciò egli ripiglia: » *Le ricerche del grande* Euler *sullo stesso argomento non ebbero un assai miglior successo* (par che le » dia come posteriori a quelle del Lexell, che presero da esse occasione), *benchè il sig. Fuss ne abbia resi un poco più semplici i risultati* «.

Passa quindi ad accennare le soluzioni del Carnot, e del Lhuilier di cui mostra conoscere solamente ciò che vedesi riportato ne' costui *Élémens de l' Analyse géométrique, et l' Analyse algébrique*, senza darsi affatto carico del lavoro più esteso pubblicato negli Atti di Berlino pel 1796, e che meritava maggior considerazione, anche

in riguardo a quello ch' egli si proponeva pubblicare ; e riconosce i tentativi di costoro pel problema generale del poligono , come compresi nella soluzione del La-Grange .

Finalmente » *ritornando alle soluzioni del La-Grange e del-* » *l' Euler*, così ragionava *: mi sia permesso di osservare che, pre-* » *scindendo dalla complicazione de' risultati a' quali conducono,* » *niuna delle due possa dirsi rigorosamente algebrica : poichè* » *la prima è fondata* SOPRA NOZIONI DI TRIGONOMETRIA , E CARICA » A RIBOCCO DI QUANTITÀ ANGOLARI , *e la seconda abbisogna di va-* » *rj lemmi di Geometria . Egli è intanto ben strano che un me-* » *todo forse il più naturale , e senza dubbio il più analitico sia* *sfuggito alla sagacia di quelli uomini illustri* « . Egli non aveva dunque avuta la pazienza di leggere tutto questo argomento del Lhuilier, che ben gli sarebbe mancato il motivo di tanta sorpresa [17]. E nel modo come ragiona pare che gli fosse sfuggito, non potere il La-Grange adoperarvi un metodo al quale nè men per ombra pensava ; il che tanto più comprova la puerilità del Padula in dirlo *Lagrangiano.* Or egli così continua il suo discorso: » *in fatti trattandosi d' iscri-* » *vere ad un cerchio un triangolo , i di cui lati sieno rispetti-* » *vamente in direzione con tre punti , qual metodo più semplice* » *ed analitico di quello , in cui si pongono a profitto l' equazio-* » *ni del cerchio , e di una retta condizionata a passar per un* » *punto ?* « (e noi subito gli proporremo quello di congiugnere il centro del cerchio , come fa il La-Grange , co' punti dati , il che inchiude una delle condizioni del problema , e ricorrere alle funzioni circolari degli angoli che queste formano co' raggi condotti a'

[17] Ciò che questo insigne geometra dice su tal proposito , si potrà anche riscontrare nelle *Considerazioni* aggiunte al programma , a pag. 32.

palmente mirava il Gergonne, una tal costruzione non si vede affatto come mai avesse egli potuto ottenerla: ed è pur essa però quella del Gergonne. Aggiungasi, che irregolarmente vedesi anche staccata dal corpo dell' analisi la considerazione della polare necessaria alla costruzione. E da questo ricercato irregolare andamento, ed inversione di parti di un' analisi più diretta, come quella del Gergonne, ognuno sarebbe, senz' altra ragione, indotto nel sospetto che tutto ciò si fosse per qualche oggetto operato. Finalmente, le due equazioni finali, nel caso della parabola divengono identiche, con la semplice supposizione della $\beta''=o$ in quella del Gergonne; giacchè il prof. Tucci ha supposto che un degli assi delle coordinate passasse per un de' tre punti dati P, le cui coordinate essendo secondo il Gergonne α'', β'', divengono, secondo il Tucci α'' e *zero*. E se il procedimento analitico del Gergonne si applicasse all' ellisse, e nell' equazione ultima di questo si ponesse anche la $\beta''=o$, risulterebbe a dirittura quella del Tucci per tal caso. Chi mai dunque, sebbene non sia *tanto versato ne' segreti dell' analisi moderna applicata alla Geometria*, come si esprime il Tucci nella nota a pag. 10 del suo opuscolo, e 'l fa ripetere al giovinetto Padula nella *risposta*, non ravviserebbe in ciò l' identità delle due soluzioni, e quindi ne addirebbe la proprietà a chi la produsse ben due anni prima? Aggiungasi, inoltre, a tutto ciò, che la costruzione che ne reca il prof. Tucci, senza poterla nè men dimostrare, l' è, come si è già accennato, quella del Gergonne; ed egli a pag. 18., mentre l' annunzia per sua, la dà per *elegantissima* e *conosciuta*; sicchè pare, ch' egli medesimo si avesse voluto in qualche modo sdebitare col Gergonne, e verso i matematici, che avrebbero riconosciuta sempre la costui soluzione di tal problema come l' originale, pel tempo, e per la regolarità di condotta. Ma poi è in nostra scuola, che il proble-

ma del poligono fu pel cerchio la prima volta elegantemente risoluto dal Giordano, e dopo parecchi anni dallo Scorza; e sarebbe stata cosa veramente degna di uno pur nutrito dal latte di questa, se non avesse giammai prima del 1818 osservata la soluzione del Gergonne, cui, per un caso stranissimo ed incredibile, la sua tanto era risultata identica, avendola poi dopo veduta, di fare ogni sforzo onde meritare il vanto di originalità, producendo il metodo delle coordinate fino alla soluzione di questo problema più generale. Noi non diffidiamo, che il giovine Padula, cui solo è dato di penetrare addentro ne' segreti di questo più che difficil metodo, accorrendo in ajuto al suo maestro, voglia renderci di ciò paghi. Lo prevenghiamo però, che disgraziatamente in tal ricerca non troverà nulla già fatto da altri, per potersi al suo solito orientare. E noi dopo che, atteso alcun tempo, rimarremo delusi nella speranza di veder ciò da esso prodotto, tuttochè impossibilitati a comprender solamente il metodo delle coordinate, ed appena iniziati ne' segreti dell' analisi moderna, non mancheremo di presentarne al pubblico indulgentissimo la nostra algebrica soluzione.

NUM. II.

Analisi critica della costruzione presentata al pubblico dal sig. Padula, nella risposta al Programma pubblicata in suo nome, pel primo quesito di esso.

Il giovine D. Fortunato Padula non avrebbe dovuto mostrar di tanto fastidire la dimandata costruzione dell'equazione assegnata dal La-Grange al famigeratissimo problema *del cerchio e de' tre punti*, subito che, a parte dell' Eulero, del Lexell, del Fuss e di tanti sommi uomini che l' avevan riconosciuta come difficilissima, e pressochè ineseguibile, il suo maestro Tucci gliel' aveva data ancor per tale. Ma pure vedendo egli costretto il suo genio tra' cancelli di cosa che non fosse interamente parto del suo sublime ingegno, non può far a meno di mostrar dispiacere, in trattarla (come se assolutamente fosse a lui solo dimandata). Finalmente *per disingannare coloro che credono e van ripetendo tuttora non potersi costruire le formole della leggiadrissima soluzione analitica che La-Grange ha data del primo problema*, ec. ec. si offre al grave sacrifizio, e scende qual nuovo valoroso atleta del metodo a due coordinate, nell' arena a combattere.

Ma a parte di tutto ciò, avrebbe mai egli soddisfatto al primo quesito del programma? Vi ha egli adoperati nella costruzione dimandata gli stessi principj impiegati dal La-Grange per la soluzione, e non altri? E dov' è mai l' accortamente dimandata dal proponente di essa dimostrazione analitica, ordita con gli stessi principj dell' analisi, da quel sommo analista tenuta, per pervenir all' equazione? Il Padula si contenta dirci, che la stimava inutile, e per più sicurezza aveva anche ciò soppresso nell' enunciar a suo modo quel-

la quistione. Ed il pubblico giudicherà con qual fede si adempia alla premessa, e si adontino uomini sommi; tra' quali l' Eulero e lo stesso La-Grange, non che Fuss e Lexell, e costui principalmente, che non riescirono ad ottener la richiesta costruzione, e l' Eulero fortemente dubitava che a ciò si potesse comodamente riescire.

Ma vi è riescito il Padula? Egli il dice; non però il persuaderà sicuramente ad alcuno, che concepisca solamente cosa debba intendersi per costruzione di un' equazione. Non crediamo ch' egli giunga fino a negarci, che le quantità ch' entrano a comporre l' equazione al problema, derivanti da' suoi determinanti, debbano nella costruzione apparire; e noi gli dimanderemo ove queste appariscano nella costruzione ch' egli ne esibisce? Ci risponderà ne siamo persuasi, che sono esse trasmutate in altre loro funzioni, che sono quelle che poi in questa si mostrano, e noi gliel concederemo: ma allora per ognuna vi sarà ad aggiugnere una costruzione particolare onde ottenerla geometricamente; e queste parziali costruzioni renderebbero assai inelegante la dimandata. È quì che si verificherebbe esattamente ciò che al sig. Padula fa dirsi a pag. xxx., pel mal da lui conosciuto metodo Cartesiano [18]. Noi non crediamo con ciò aver

---

[18] » Nel metodo Cartesiano, il ritorno dall' Algebra alla Geometria si rende » spesse volte complicatissimo, a cagion della moltitudine delle quarte e medie pro- » porzionali da trovarsi, onde eseguire la composizione grafica del problema «. Or noi di buona fede non conosciamo nel puro *metodo Cartesiano* tutta questa complicazione come dipendente da esso; ma dall' equazione più o meno onusta di termini, e questi più o meno complessi; e s' è così, non sappiamo vedere come lo stesso non avvenga nel metodo a due coordinate. E per un saggio di ciò potremmo giustamente dimandare, che ci si esibisse una elegante costruzione del problema di: *adattare in una curva conica una data corda, la quale passi per un punto dato*, di cui con nostro dispiacere ne vediamo recata l' analisi solamente, nelle migliori istituzioni moderne di Geometria analitica.

persuasi i risponditori al programma ; poichè è inutile di parlar di eleganza di costruzione a persone, che con estrema confidenza vi dicono, non esser più richiesta ne' problemi geometrici la costruzione , che una soluzione di un problema ne val quanto un'altra , che vi si può adoperare quel metodo che si vuole , che per ricerche elementari valga lo stesso ottenerle con la Geometria o l' Analisi de' finiti , che con quella degl' infinitesimi , *ec.* , *ec.* [19].

---

[19] Questa maniera nuova di sragionare è stata prodotta in mezzo dal Padula per contraddire quel luogo della prefazione del Fergola alle sue *Sezioni coniche analitiche*, ove tra' difetti nel trattarle col moderno metodo delle coordinate , vi notava quello, che nelle dimensioni delle dette curve si dovrebbe ricorrere al calcolo integrale , *subordinando* , com' ei si esprime , *il sommo all' imo* , o *volendo un facil fine con difficili mezzi ottenere* . Or noi sebbene dovremmo assolutamente disprezzare ciò, che a tale esatto e chiaro ragionare si oppone, pure ad abbondanza vogliamo addurvi un luogo dell' Eulero, che ci troviamo per le mani : ove questo valente analista volendo trarre dalla determinazione della tangente di una curva la direzione di questa in tal punto , dopo un breve ragionamento del modo come ciò ottenere , così continua : *neque enim ulla offenditur difficultas , dummodo aequatio pro curva proposita fuerit rationalis atque a fractionibus libera . Ad talem autem formam aequationes omnes semper reduci possunt . Sin autem aequatio fuerit vel irrationalis , vel fractionibus implicata , neque eam ad formam rationalem et integram reducere vacaverit , tum eadem quidem methodus , at cum moderatione quadam , adhiberi potest , quae ipsa moderatio* Calculum differentialem *produxit ; quam ob rem methodum inveniendi tangentes , si aequatio pro curva proposita non fuerit rationalis et integra , in calculum differentialem reservabimus* (*Theoria linearum curvarum* §. 291). L' Eulero dunque , per un tale argomento, distinse una parte elementare da un' altra sublime , che riservava al calcolo differenziale ; e non pensò tanto liberamente quanto i signori contraddittori , che si dovesse indistintamente tutto trattare con questo metodo più sublime .

E giacchè ci troviamo su questo proposito, adopreremo l' autorità stessa di un tal sommo uomo a convincere i nostri strani contraddittori , che ben lungi dall' essersi omesse , nelle moderne istituzioni di Geometria analitica , le cose notate-

Ma qual' è mai questa pretesa costruzione esibitaci a nome del Padula? Essa non è altro che un artifizio analitico di trasformazioni trigonometriche, per far entrare l' equazione data dal La-Grange con un' analisi semplicissima in quella ottenuta con un' analisi tutta diversa dal Gergonne, modificandola pel cerchio: e noi loderemo volentieri questo ingegnoso ripiego, ma non ci faremo sorprendere in valutarlo per la costruzione dimandata, la quale dovrà presentarcisi con la sua propria veste, cioè facendo ravvisare nella costruzione le quantità stesse che hanno servito all' analisi, e gli stessi principj che questa ne hanno guidata. Ma a convincerli maggiormente su di ciò gli dimanderemo, se possa proporsi a costruire geometricamente un' equazione senza conoscere il problema da cui deriva? Certamente che non oseranno ciò negarci. Sappiam bene che subito lo diranno *esercizio di scuola*; poichè per essi tutto è tale: ma noi, che al rango di scolastici non abbiamo a male di stare, gliel concederemo, purchè confessino, che in questo caso essi non avrebbero saputo adoperare que' ripieghi di riduzione di un' equazione ad un' altra: e questo per l' appunto era il caso in cui trovavansi il La-Grange, l'Eu-

---

vi dal Fergola, lasciandole ad esercizio de' giovani, esse lo sieno state, perchè non poteano ricavarsi col metodo puro algebrico: di fatto ecco in qual modo egli s' introduce a trattare delle linee del second' ordino: *Quoniam vero istae proprietates omnes non ex uno principio derivari possunt, sed alias aequatio petefecit, alias generatio ex sectione coni, alias denique alii describendi modi, hic tantum eas proprietates investigabimus. quas aequatio sola sine aliis subsidiis suppeditat*. E noi senza comentare questi detti di sì grand' uomo, che non è questo il luogo opportuno, ce ne prevarremo solamente a conchiudere, che quelle omissioni sono conseguenza intrinseca del metodo che si adopra a trattare il soggetto; e che laddove il maggior numero di proprietà delle curve coniche si voglia ottenere, bisogni assolutamente adoperare, come ha fatto il Fergola, il metodo geometrico-analitico.

lero, il Fuss, il Lexell, e tanti altri, che per circa ben dodici lustri hanno invano ricercata una tal costruzione; ond' è che finalmente si videro ridotti all' espediente di abbandonare quell' analisi semplicissima, per ripiegare in altra più complessa, ma che conducesse però a risultamenti costruibili: che grazie al Cielo non tutti pensano come i censuratori del programma, che la costruzione sia ora tenuta per una cosa superflua ne' problemi geometrici, le cui equazioni debbonsi aritmeticamente trattare: ed osano fin dire, che il La-Grange non mai pretese, che quella ottenuta per la sua soluzione del presente problema dovesse costruirsi; mentre egli stesso così esprimesi su tal proposito: *équation qui, étant ordonnée par rapport à l' incoronue s, monterà au second degrè, et sera par conséquent res oluble par la regle et le compas*. Che al signor Padula, ed a' suoi direttori sia data facoltà di penetrar nella mente di tutti i sommi uomini e passati e presenti, ed esprimerne i sensi, quando questi non siensi da essi propalati, come ad ogni passo incontriamo fatto nella loro *risposta*, vada pure: ma che abbiano a far ciò quando quelli dicono a chiare note il contrario, non sappiam persuaderci affatto come possa avvenire. A parte però di queste ragioni, svaniranno tutte le insulse ed insolenti proposizioni de' contraddittori, quando noi potremo mostrare ad essi la costruzione dimandata nel programma nel modo come ivi richiedesi; sicchè la soluzione del La-Grange rimarrà compiuta in ogni parte, e si sarà soddisfatto finalmente a' voti de' geometri ed analisti sommi, che una tal ricerca non avevano tenuta in quella vilezza in cui i censuratori or la ripongono.

Noi non vogliamo abusar tanto della pazienza del pubblico, procedendo in ciò più oltre, senza che ve ne sia bisogno; perchè potremmo altrimenti ben mostrare a' *risponditori* non esser quella

da essi tenuta la sola via da trasmutare l' equazione del La-Grange in quella del Gergonne: dal che deriverebbe per conseguenza, che di tante vie, tanti sommi uomini non avessero potuto, pel corso di tanti anni, rinvenirne alcuna, per eseguire la desiderata costruzione di quell' equazione; il che ripugna al senso comune de' matematici. E però conchiuderemo, che la costruzione esibitaci dal sig. Padula non sia quella nel programma dimandata, nè la corrispondente direttamente alla soluzione del La-Grange.

Ci sia solamente, per ultimo, permesso, trovandoci sul cammino di questo argomento, di porre innanzi a' risponditori alcun'altra cosa alla quale forse non hanno avvertito. Essi tenevano presente fin dal 1816 la costruzione generale per le curve coniche data dal Gergonne, dalla quale era ben facile, specialmente limitandola al cerchio, rilevarne l'identica costruzione a quella di Pappo, pel caso che i tre punti fossero per dritto: e però non dovevano menar tanto rumore di una cosa, che qualunqne giovinetto appena introdotto ne' segreti dell' Analisi e della Geometria vi avrebbe saputo rilevare.

NUM. III.

Analisi critica della pretesa nuova soluzione del sig. Padula al 2°. quesito del Programma.

Questo problema assai difficile, che il celebre prof. Malfatti trattò il primo, adoperandovi il metodo Cartesiano [10]; ond' è che comunemente vien detto del Malfatti, ha incontrata maggior grazia presso del Padula, da volersene pur occupare, non senza aver però prima censurato l' autor del programma di andar riproducendo problema già vecchio ed elegantemente risoluto da quel distinto geometra italiano, ritrovando egli solo nell' analisi da costui recatavi que' pregi, che nè lo stesso autore, nè altri distinti matematici vi ravvisarono giammai; ond' è che per compierla ricorsero a verifiche, in difetto di più rigorosa dimostrazione, o pure ad altra nuova analisi si rivolsero [11], al qual ripiego si appiglia anche il Padula, che dopo ciò che aveva detto non avrebbe dovuto dipartirsi dalla soluzione del Malfatti. Ma tant' è, perchè egli non vede le cose in loro stesse, ma attraverso il principio di contraddizione, e non si accorge, che il più delle volte questo ritorna a danno del da lui medesimo operato: ed egli avrebbe fatto il meglio di risparmiare a se il tedio di occuparsi di quest' altra rancida quistione, ed a noi quello di analizzare ciò ch' ei vi pretende di sua proprietà.

Egli dunque, con la guida de' suoi maestri, a' quali è solamente dato penetrare nell' astruso metodo delle coordinate, e che hanno rese presso noi ad un tratto adulte le matematiche, le quali

---

[10] Mem. della Soc. Ital. an. 1803.

[11] Vegg. le *Considerazioni* part. II. e III.

nella scuola del Fergola per ben sessant' anni bamboleggiarono sino a loro, ci promettono una nuova soluzione con questo metodo. Egli dunque comincia dal voler riferire ad assi coordinati, cioè ad un lato del triangolo, e la perpendicolare al medesimo in un degli estremi, il sistema delle quantità lineari che concorrono alla quistione; e prendendo per incognite le coordinate de' centri de' due cerchi tangenti un tal lato, come ancor gli altri già prima avevan fatto, e sommettendo al calcolo le condizioni del loro reciproco contatto, e di quelli col lato del dato triangolo, perviene ad una coppia di equazioni a due indeterminate rimpetto agli assi stabiliti. Dopo ciò soggiugne: *similmente si otterranno altre due coppie di pariformi equazioni*. Or egli in ciò fare non ha ravvisato, che per queste altre due coppie di equazioni, le coordinate tanto de' punti cogniti che degl' incogniti debbon riferirsi a nuovi assi, che nulla hanno di comune co' primi, cioè agli altri due lati del triangolo, e le rispettive normali; e che per ottenerle relativamente a quelli già stabiliti, come il metodo adottato esigerebbe, tali equazioni di verrebbero erronee. E volendo evitar questa taccia bisogna confessare come superfluo lo stabilimento di que' primi assi, e l'analisi del sig. Padula ritornerà tutta col metodo Cartesiano, pari a dirittura a quella del Lechmütz; e non con quello delle coordinate erroneamente appropriatovi, per mascherare fin dal principio l'usurpazione che facevasi della soluzione del geometra di Berlino. Noi cui non è dato conoscere un tal metodo, non siamo però fatti col resto de' matematici, per farci illudere da vane apparenze, e per cadere in simili errori per ibridismo di metodi. E da ciò, e dal considerare che un tal problema non sia stato nè meno dagli analisti di Lione tentato col metodo delle coordinate, saremmo indotti a credere, che essi, ed ancor altri egualmente accorti, ne giudicassero un tal metodo poco atto a risolverlo.

Or le tre equazioni stabilite dal Padula sono le identiche a quelle ottenute dal Malfatti, dal Lechmütz, e da altri che hanno trattato un tal problema con l' analisi Cartesiana [32]; e però fin quì nulla di nuovo, oltre il mal cucito travestimento, ci offre la sua soluzione. Dopo ciò, valendosi egli opportunamente delle ricerche già fatte da costoro intorno a tal problema, o per dir meglio circa la maniera di ricavare da quelle tre equazioni già assegnate i valori delle incognite, introducendo tre nuove incognite, viene a stabilire altrettante equazioni, alle quali gli altri non eran pervenuti che in fine de' loro calcoli. Siffatta avvertenza gli ha facilitato grandemente il lavoro algebrico; ed è però da giudicarsi un lodevole ripiego [33]; ma non gli meriterà mai il vanto di una soluzione originale, ricordando noi qui a proposito la bellissima dottrina del Taylor, riportata dall' autor del programma nella nota (*s'*) a questo riprodotto, che: *Analysin constituunt praecepta, juxta quae deinde instituitur calculus; qui non analysis est, sed instrumentum analyseos. Praeceptis semel posits, quivis facile calculum instituit, more quisque suo, hic prolixius, ille magis concinne, prout unicuique faverit Minerva*. E deesi inoltre osservare, che la sostituzione che egli vi pratica è pur identica a quella ricavata dal Malfatti da' suoi valori; e ch' esso non ha avvertite le facili conseguenze che da questi svolgonsi, conducenti ad eleganti costruzioni del proposto problema.

Ma quì non vuolsi tralasciar di osservare, che il sig. Padula nell' istituire il suddetto suo calcolo, non rimanendo appieno soddisfatto

---

[32] Ved. *Considerazioni* part. III.

[33] Non possiamo però condonare il sig. Padula, che anche in questo ripiego analitico ben eseguito, ed a proposito, dimenticando che trattasse problema geometrico, intenda per le nuove incognite che adotta *le determinazioni aritmetiche di que' radicali* ch' esse rappresentano.

de' valori rinvenuti per le tre incognite x, x', x'' soggiugne in nota una verifica di essi, cominciando così a dire: *Per convincersi vie maggiormente che questi sono i valori di x, x', x'', si rifletta*. . . . . Dunque egli stesso confessa, che il cammino della sua analisi non sia chiaro abbastanza, ed abbia bisogno di dilucidazioni e verifiche ne' suoi passaggi; ed essendo così per l' autore di esso, dalla cui mente derivava, cosa dovrà mai diventare per coloro, che debbon comprenderlo senza la guida dell' invenzione? e noi non istaremo a ridire al sig. Padula, che il cammino dell' invenzione geometrica dee esser chiaro, e scevro da ogni ancorchè minimo dubbio; e che tale sia stato quello sempre battuto da' geometri ed analisti di ogni età.

Aveva ancor egli, nel corso del suo calcolo, tralasciato di considerare il doppio segno de' valori da esso rappresentati per le incognite introdotte, ritenendo il solo positivo, e promesso ritornarvi in appresso: e però fedele a tal promessa, dopo terminata la soluzione, ritornando su quell' oggetto, va enumerando i diversi casi del problema, e le costruzioni particolari per essi: e ciò sarebbe stata lodevol cosa, se finalmente non ne avesse con vanità puerile conchiuso: *deesi di necessità convenire, che non a tutti è dato il poter vedere* a priori *quante e quali sieno le diverse soluzioni che può un dato problema presentare*. Su di che primieramente gli osserveremo, che non può dirsi fatta *a priori* una tale enumerazione di casi, e soluzioni corrispondenti al proposto problema; nel quale errore non sarebbe egli incorso se avesse avuta la menoma conoscenza delle opere analitiche degli antichi, ove ad ogni passo avrebbe avvertita qual fosse la diretta via da distinguere i casi, e le soluzioni di un problema geometrico: l' analisi moderna non potendo definirli che da' risultamenti, non potrà mai dirsi che vi

pervenga *a priori*. Ma di ciò sia per ora abbastanza detto: poichè noi ad istruirlo, che non siavi *necessità di convenire* di quello ch'ei dice con tanta jattanza, gli mostreremo in un' unica soluzione compresi tutti que' casi, ed effettivamente *a priori* derivati, subito che ci sarà permesso pubblicare la nostra geometrica soluzione del problema di cui ragionasi.

In fine conchiudendo il Lechmütz, cui tanta affinità ha il lavoro del Padula, le sue ricerche su tal problema col dire, che; *trovate una volta le espressioni da lui esibite de' raggi de' cerchi, non v' ha cosa piu facile che di sostituirle tali altre incognite quali si vorrà*; il che è sommamente ragionevole, e detto da buon geometra, il Padula volendo anche in ciò imitarlo indegnamente, ne trasmuta la proposizione nella seguente: *Possiam dire, che qualunque soluzione si darà mai del presente problema, si potrà sempre* FACILMENTE dalle NOSTRE *equazioni ricavare*. — *Questa proposizione che qualcuno poco versato ne' metodi geometrici potrà credere troppo ardita, sarà diversamente giudicata da coloro, che esercitati nelle soluzioni algebriche de' problemi geometrici, conoscono pur troppo* quali, e quante conseguenze, *possansi dedurre dalle equazioni di un problema*. In verità noi non sappiamo intendere ciò che voglia dirsi con quel *quali e quante conseguenze*, al proposito di cui trattavasi: ma pure lasciando da parte le parole vuote di senso, e dette veramente a caso, di cui abbonda tutta la *risposta padulana*, gli dichiareremo, che nessuno mai negherà potersi l' equazione ottenuta per un problema trasmutare in un' altra, che per altra via si ottenga soddisfacente al medesimo, e n' è un argomento il passaggio da lui fatto da quella del La-Grange pel problema del Cramer all' altra del Gergonne; di che noi abbiamo più sopra ra-

gionato : qui però non trattasi delle trasmutazioni indicate ; sì bene di far dipendere ogni altra soluzione da quelle ch' egli dice NOSTRE equazioni , che son poi le stesse del Lechmütz e di altri analisti , e propriamente le

$$u = \frac{x'x''}{2x} \qquad u' = \frac{xx'}{2x'} \qquad u'' = \frac{xx'}{2x''}$$

E noi poichè egli si offre volentieri a farlo , ci rendiamo arditi ad invitarlo a volerci derivare *facilmente* , o ancor *difficilmente* , che ce ne dichiariamo pur contenti , da tali equazioni la nostra soluzione , subito che sarà pubblicata ; onde possa una volta o confonder noi , facendoci cambiar opinione , o correggersi egli in avvenire di tanta presunzione , e rendersi più cauto in avventurar proposizioni senza prima ben ponderarle.

NUM. IV.

ANALISI CRITICA DI CIÒ CHE NELLA RISPOSTA SI È ACCENNATO RELATIVAMENTE AL TERZO QUESITO DEL PROGRAMMA.

Ci si apre il cuore in vederci prossimi a sgravarci di questo ingrato lavoro, in cui per opporre qualche argine a tante sciocchezze condite di maldicenza, siamo noi anche talvolta caduti in questa; di che ne dimandiamo perdono al pubblico, che ragionevolmente da ciò abborrisce, apprezzando solamente quello che fa al suo caso, e ch' è conducente al progresso delle scienze. Ma pure speriamo da esso qualche indulgenza, guardando ad aver noi difesa opera certamente buona, consentanea al suo scopo poc' anzi detto, che tale è sicuramente la proposta del programma sì villanamente contraddetto; ed al non aver mancato ancora di lodare i contraddittori ove di lode gli abbiamo creduti degni.

Fortunatamente per questo terzo quesito essi ci offrono poca materia ad esame; poichè fin dal principio, avendo scorto l'argomento di esso assai difficile, e mancando di materiale da altri preparatogli, come pe' due precedenti era avvenuto, stimarono conveniente di prima pubblicare esser il problema che enunciavasi *più che determinato ed impossibile*[34], indi nella *risposta* a p. 42 il dissero solamente *più che determinato*, e poco dopo il diedero come *mal proposto*: e però abbandonarono la pena di condizionarlo convenevolmente a *coloro cui piace di risolvere tutti i problemi che sono affini*[35], soggiugnendo, *noi non già, e perchè non siamo obbligati a*

[34] Giornale dell' *Omnibus* del dì 11 Maggio.

[35] Non sappiamo capire cosa voglia intendersi per questi problemi *affini*, nel presente caso.

modificar prima gli enunciati dei problemi malamente proposti, e poi risolverli, e perchè sarebbe questo un procedere perfettamente in opposizione alla propria opinione, considerando noi le ricerche di pura Geometria come cose belle, non v' ha dubbio, ma troppo sterili, e di troppo poco interesse per poter, finito il corso degli studj elementari occupare le menti di coloro, che vogliono le matematiche coltivare nel secolo presente, in cui siffatte scienze applicate alla Filosofia Naturale, alle Costruzioni, alla Meccanica industriale, ec. di tante e tante ricerche vannosi di giorno in giorno arricchendo. . . . .

Dunque essi si sono solamente abbassati a rispondere al programma per dir villanie e sciocchezze, e si ricusano dove si tratti non di raddrizzar enunciazione del problema [36], che l' è esso ben proposto, ma di eseguirne la *determinazione*, ch'è principal parte della soluzione del medesimo. Lo ripetiamo, la vera ragione di ciò è la difficoltà dell' argomento, ed il non trovarvi altro in esso già fatto, da prevalersene opportunamente: poichè mentre non neghiamo il vasto campo di ricerche, che i moderni hanno fatte, mercè l' analisi algebrica che ha tanto progredito, nelle applicazioni alle scienze di fatto, non possiamo persuaderci, che si debba in questo secolo ab-

---

[35] In più di un luogo si è lo stesso errore ripetuto, e tra gli altri nella prefazione i contraddittori così esprimonsi: » Essendo veramente bizzarra idea che si » possa regolarmente proporre un problema affidando a chi voglia risolverlo l' in- » carico di modificarne l'enunciato « (no gli ripeteremo, ma di eseguirne la determinazione) » non ci saremmo incaricati di rintuzzarla, se a convalidare una tale » opinione non si fosse citata in appoggio una parte di un passo di Pappo, il quale » milita anzi evidentemente in nostro forore «: cioè non sapendo intenderlo, e però scioccamente interpetrandolo a lor modo, come ben rilevasi dalla noterella in fine delle dotte *Considerazioni* dell' autor del programma.

bandonare ogni astratta speculazione, vale a dire troncare all' ingegno umano quelle ali che l' han fatto salire all' altezza di mezzi, che vale ora a produrli tanto vantaggio. Diceva l' illustre Bacone ragionando da gran filosofo qual era: *prout Physica nova in dies augmenta capiet, et nova axiomata educet, eo Mathematicae nova opera in pluribus indigebit* . . . e vi saran matematici non capaci di riconoscer questa gran verità ch' egli pronunziava per la loro scienza? A' censuratori piacerà piuttosto coltivare le applicazioni di essa alla Meccanica presa in tutta l' estensione, e faran bene: ma non debbon però disprezzar coloro che attendano alla Geometria ed all' Analisi pura, da' quali dovranno all' occasione ricever que' mezzi, che gli occorrono per riescir nelle loro ricerche. Ed essi avranno ben ragione coltivando quella parte, di non occuparsi delle altre, che non ogni uomo vale a comprendere e percorrere tutto il vasto campo di tali scienze: che non si può ad un tempo essere e gran geometra, e meccanico speculativo, ed astronomo, ma ciascuno dee aver la sua parte a specialmente coltivare, rari essendo coloro che valgono a comprenderne due insieme; e quelli che ciò poterono, o possono, a cominciar dal Newton, grande e primo promotore dell' applicazione della Geometria e del Calcolo alla Meccanica, e comprendendovi tra' principali il La-Grange, non si sono regolati come essi ci dicono; ma hanno a passo eguale coltivate le Matematiche astratte e le applicate, come ne fan testimonianza le loro opere, e 'l gran numero di Memorie del secondo di essi inserite negli Atti di Berlino. Ed in comprova di ciò, sebbene non ve ne sia bisogno, che non v' ha uomo distinto de' nostri tempi, il quale osasse pronunziar francamente l' abbandono ed il disprezzo delle Matematiche pure, addurremo qui la risposta che davano al Wallis, in un caso simile al nostro, i due insigni geometri francesi Fer-

mat e Frenicle : *Facile est illud despicere ad quod non possumus pervenire . Nec etiam multum convenit mathematico, conqueri cui bono sint haec problemata . Eodem vero jure quaereretur cui bono tota pene Geometria et Arithmetica , si paucula quaedam et ea magis trita et a peritis despecta , quibus geodetae , agrimensores , mercatores , et qui utramque Architecturam excercent , aliique complures in suis calculis utuntur excipias ; caetera namque magis recondita , et praestantiora nonnisi ad scientiae sublimitatem et perfectionem spectant . Cum autem sit proprium intellectus humani veritatem inquirere ; nec aliam ob causam viri praestantes scientiis acquirendis operam dederint ; inutilis certe dici non debet in disciplinis alicujus acquisitio veritatis.* E noi ci siamo un poco estesi su di ciò , che spesso abbiamo inteso ripetere da' contraddittori , fino ad essersi una volta in pubblica discettazione innanzi ad un distinto corpo di dotti nazionali negato , che le Accademie avesser mai accolto ne' loro Atti ricerche di Matematiche pure ; poichè ci spiace assai , che la gioventù nostra , imbevuta di tali massime da que' suoi istitutori , venisse deviata , come pur troppo l' è , dal buon sentiero , e dal retto apprendimento .

Dopo queste poche avvertenze nulla ci rimane a dire relativamente allo sragionar che si è fatto sul presente problema , già più volte proposto negli *Annali delle Matematiche*, e trattato ancora in qualche modo dallo Steiner distinto geometra tedesco , come rilevasi da quello che nella poc' anzi citata opera se ne accenna [37] ,

[37] Noi del pari che i risponditori al programma non conosciamo la soluzione recata da questo geometra al problema della piramide in quistione ; ma ce ne riportiamo alla fede di quello , che i distinti compilatori degli annali ne dicono , ch' esso fosse stato in certo modo risoluto , e che l' autore , nelle cui mani la ma-

poichè un tale argomento è stato dottamente trattato dall' autor del programma nelle note alla ristampa fatta di esso, e nelle *Considerazioni* che il seguono; e ricordiamo averci da principio proposto di voler connettere questa nostra analisi critica in supplemento di ciò ch' egli, usando di sua dignità e moderazione, si era limitato ad accennarne su questo indecente procedimento avverso la sua liberalissima proposta [32].

Conchiuderemo dunque da tutto ciò, come l' autor del programma, che il problema delle piramide proposto per terzo quesito, non sia *mal proposto*, non *più che determinato*, non *impossibile*; ma che sia un difficilissimo problema, nel quale la maggior

---

teria in trattarlo si era molto estesa, serbavasi a pubblicarne la soluzione in un' opera di proposito, che per verità finora non sappiamo essere comparsa alla luce. E fa anche più peso il trovarsi fatta menzione di tal soluzione, nella distinta raccolta di produzioni matematiche di geometri principalmente tedeschi, che pubblicasi in Berlino dal distinto segretario di quella rispettabile Accademia, sig. Crelle, della quale essendone stati inviati da costui alcuni numeri al nostro professor Flauti, disgraziatamente tra essi non vi si ritrova quello ove inseriscesi il lavoro dello Steiner su tal proposito. I censuratori al contrario, divinando la cosa al loro solito hanno francamento ragionato della soluzione dello Steiner senza conoscerla, ismentendo quello che i dotti compilatori degli annali no avevan detto, e dando per conseguenza come un visionario il Crelle, che gli aveva dato luogo nella sua *raccolta*. Ma noi che di concetti sì grandi non siamo capaci, ci asterremo dal dir qualunque cosa di un lavoro che affatto non conosciamo, finchè non ci sarà pervenuto nelle mani, e lo avremo attentamento considerato.

[32] I censuratori non volendo nè meno mandar buono all'autor del programma, ch' egli desiderasse di veder aggiunta la soluzione di quest' altro problema a compiere le sue ricerche geometriche su' *contatti sferici*, e sulla *piramide triangolare*, notano non aver egli *posto mente alla natura del problema*: su di che equivocano essi in iscambiare la *determinazione*, o anche a lor modo se vogliasi, la *mala proposizione* di un problema con la *natura* di esso: il che è veramente un errore puerile.

difficoltà consiste nella convenevole *determinazione*, dalla quale rimanga definita la specie delle piramidi in cui la dimandata iscrizione può aver luogo; che a questa analiticamente trattandolo debbano concorrere le equazioni eccedenti, che a prima vista presentansi nella sua algebrica soluzione; e che sia una ben degna occupazione de' geometri ed analisti de' nostri tempi di validamente occuparsi a trattarlo: ricordando non esser esso il primo esempio di problema, che nell' antica storia delle scienze esatte, e nella moderna abbia tenuto per lungo tempo occupate le menti de' sommi matematici, alle cui fatiche ha finalmente il fatto con buon esito corrisposto. E noi non tralasceremo di fare anche da nostra parte tutti gli sforzi, onde poter riescire nella difficile intrapresa, per così poter finalmente dire, se tanto ci sarà dato ottenere, a' maligni contraddittori:

Invide, tu tandem voces compesce molestas,
Et sine nos cursu, quo sumus, ire pares.
Quid tibi vis, insane?

INDICE

ALFABETICO-CRITICO

della risposta

PUBBLICATA IN NOME DI FORTUNATO PADULA

AL

PROGRAMMA

DI TRE QUISTIONI GEOMETRICHE

PROPOSTO DA UN NOSTRO PROFESSORE.

AVVERTIMENTO

Il mio antico collega, autore dell' *Analisi critica* sulla non decente *risposta*, a nome di un tal Fortunato Padula, pubblicata non ha guari, contro un programma di tre quistioni geometriche proposte da un nostro distinto antico professore, ad esercitar le menti de' matematici suoi compatrioti, e promuover sempre più per tal modo tra essi l'invenzione in queste sublimi scienze, avendomi prevenuto nel pensiero già da me concepito, di volere, a vantaggio della gioventù nostra studiosa delle Matematiche, qualche cosa osservare su quella informe e puerile produzione, mi avrebbe fatto recedere da più pensarvi, se dal materiale raccolto non rilevassi, che in tanta ubertosa messe di errori, da recar veramente sorpresa, che si avesse potuto in poco numero di pagine comprendere, non rimanesse ancor molto a spigolare. In verità è quel libriccino del Padula *mole parvus, sed ubertate errorum gravis*: e se da una parte il non degnarlo di risposta sarebbe pe' matematici più prudente, che tempo invano perduto è per essi tutto quello che vi s'impiega; per la gioventù non dovrà la cosa esser nel modo stesso considerata: poichè disgraziatamente, a titolo non di buona istituzione, ma di

vantaggio di carriera *, non poca ne concorre presso coloro, che sono stati di quella indecente *risposta* i promotori, e gli autori. Ma poichè su tale argomento già esistevano le brevi e dotte osservazioni dell' autore del programma, e quelle del mio collega nell'*analisi critica* pubblicate, che delle già dette venivano in supplimento, non ho trovato miglior espediente da non esercitar tanto la pazienza del pubblico in inutili ripetizioni, e di non tralasciare alcuno degli errori più momentosi dell'inetta *risposta*, che quello di esibirli in forma d' *indice alfabetico*, ponendovi sotto un breve ragionamento critico, o accennandovi qualche luogo di classici autori, che gli smentiscano; e talvolta dovrà ben recar non poca sorpresa, non esservi stato bisogno che di appellarmene a loro medesimi; del che per altro non mancavano esempj, osservati anche nella precedente *analisi critica* dal mio collega. E per le stesse ragioni da costui addotte, non ho voluto nè men io apporre il mio nome in fronte di tal lavoruccio, che per necessità, e non di propria intenzione consagro al pubblico.

---

* Vedi nota n. 2. all' *Analisi critica*.

INDICE.

I. *Algebra* — Ha perfezionata la Geometria, e gli analisti potrebbero anche abbandonare di buon grado a taluni sintetici l'ammasso delle loro proposizioni staccate (*pag.* XVII.)

L'Algebra è stata senza dubbio, ed è di grande ajuto alla Geometria, per progredire nelle sue ricerche; ma nulla vale scompagnata da questa; e'l discorso di quassù l'è di persona imperita. Secondo esso si potrà far ora a meno di tutte le opere de'sommi matematici, a cominciar dalla Scuola greca, e terminando al Newton, di cui niente meno che i *Principj Matematici della Natural Filosofia* sono *quell' ammasso di proposizioni staccate da abbandonarlo a que' taluni sintetici*, che forse saranno tra gli abitatori della luna, ed a' garbatissimi risponditori sol noti. Ottimo consiglio per la buona istituzione della gioventù nostra presente; e per esso di fatti veggonsi ogni giorno escire, dalla scuola di questi saggi ed avveduti maestri, giovani che ignorano affatto gli Elementi di Geometria. Si giudichi del resto! Ma è veramente curioso, che costoro medesimi, i quali nella proposizione di sopra recata rilevan tutto dall' Algebra, dichiarando inutile affatto lo studio a parte della Geometria, poco dopo a *pag. XXIII.* si lascin dire, che l'*Algebra appoggiata alla sola Geometria elementare basta a tutto*. In somma tutta la scrittura, che per disgrazia de' nostri tempi siamo costretti ad esaminare, è un complesso di proposizioni inettissime avventurate a caso, e spesso contraddittorie tra loro.

II. *Algebra* — È il fondamento su cui tutte le parti delle Matematiche sono appoggiate (*pag.* XXVI)

Non potrà mai dirsi fondamento di una scienza ciò senza di cui essa abbia sì innanzi per tanti secoli progredito. Ed a questo proposito in fatto di Geometria ecco come ragiona il Castillon; nella sua

prima Memoria *sulle parallele*, inserita negli Atti di Berlino pel 1787.
» L'Algèbre est faite pour nous mener à des découvertes qui sur-
» passent les forces de l'esprit humain destitué de ces secours «, ed
improntando dal Montucla la seguente espressione » C'est un cric géo-
» métrique qui étend l'esprit, en lui donnant un point d'appui
» fixe qui l'aide a s'élever plus haut «, così egli continua a di-
» re: Mais qui ferait usage d'un cric pour ne monter qu'aussi haut,
» qu'il le peut naturellement? L'Algèbre est un cric; mais pour
» le rendre utile, il faut de l'art; et ou apprendre cet art? Ce n'est
» pas dans le cric même. L'Hopital, les Bernoulli, Newton, en un
» mot les algébristes les plus célèbres le possedoient bien ce cric, ce-
» pendant il sont tous tombés dans quelque paralogisme; et on n'en
» trouve point ni dans le anciens, ni dans les modernes qui ont
» marché sur les traces des anciens «. Ed a confermar questo suo
discorso appoggiasi all' autorità del Wolfio, che in tale argomento
merita ben di esser riguardato » qui n'étoit (com' egli dice) que
» *calculateur*, comme on peut le prouver par ces ouvrages, et qui
» cependant s'écrie: *Nullum est dubium quin plura irrepserint a veritate
aliena; ita ut inventa recentiorum revisione quadam indigerent; et haud
pauca firmiori fundamento superstrui mererentur. Nec alia est ratio
cur inter recentiores mathematicos agitentur controversiae, quales vete-
ribus erant ignotae* (e questo è il caso presente). *Optime igitur sibi con-
sulunt, qui methodum veterum, cum algebraica recentiorum conjungunt.
Et merito dolemus eum Newtono quod, illa neglecta, cito nimis pede
ad hanc hodie properent, qui inter mathematicos eminere volunt* (*De stu-
diis mathematicis* §. *116*). Conchiudendo. » Et Newton, et Wolf
» ont raison «. Nè vogliamo omettere di qui anche notare il seguen-
te altro luogo di Wolfio, nel trattato di sopra citato: *Quamvis e-
nim demonstrationes recentiorum analyticae quae calculis algebraicis
absolvuntur, suum etiam habere possunt usum in intellectu perficiendo;
ab iis tamen eundem expectare minime licet, quam spondent syntheticae*.
Ed il sommo Newton, come lo attesta un valente scrittore di sua vi-

ta : *Saepius eos reprehendebat qui res mere geometricas algebraicis rationibus tractant.* Finalmente , per conchiusione di queste poche osservazioni sul presente articolo , riporteremo un altro luogo dello stesso Castillon , sull' uso dell' Algebra in Geometria : » On m' auroit » fait plaisir si on avoit détaillé comment l'Algèbre peut aider à l' in» vention . La vie que Dieu m'a donnée fort longue ; puisque j' é» cris ceci dans le courant du quatre-vingt-unieme année , m' a per» mis de m' exercer beaucoup , tant dans la méthode des anciens, que » dans l' Algèbre ; et j' ai toujours trouvé que l' Algèbre sert a la Géo» métrie , seulement pour faire voir si le probléme est possible ou » impossible , et combien de cas il a . Il faut fonder l' analyse géomé» trique sur des principes fout différents de ceux qu' emploie l'Algèbre . « Ma il Castillon , il Wolfio , i Bernoulli , il Leibnitz , il Newton , e tutti i sommi matematici del secolo XVIII , ed ancòr presenti , somo uomini ignoti pe' nostri contraddittori , e *fuori del mondo* , e la loro sola autorità è bastante a stabilir la massima da essi profferita .

III. *Algebra* — È un metodo in virtù del quale si scoprono in generale le relazioni , che hanno tra loro le grandezze , le quali dipendono le une dalle altre , a fine di trovare le operazioni da farsi sulle quantità date , per dedurne le ignote in tutt' i problemi (*pag.* XXVI).

Per dare un' idea di questa bellissima definizione anche a chi non avesse mai conosciuta l' Algebra nè men da lontano , gliela convertiremo nella seguente altra : *La lingua greca , latina , italiana . . . . sono un mezzo da intendere tutte le scienze che contengonsi profondamente trattate ne' libri , che in quelle rispettive lingue sieno scritti ; sicchè senz' altra conoscenza che della sola lingua vi si divenghi dottissimo .* Di tal che un perito grammatico, sarà ad un tempo filosofo, matematico, medico , giureconsulto ec. ec. profondo. L' Algebra è la scienza del calcolo universale , come l' Aritmetica del particolare , e dà i mezzi onde

rappresentare e sviluppare con facilità que' rapporti che esistono tra le grandezze, i quali per esser definiti hanno bisogno della conoscenza del peculiare ramo delle Matematiche cui le grandezze riguardano: e però della scienza dell' Aritmetica, se l' Algebra si applichi a problemi numerici, ne' quali più vasto ed esteso è il suo dominio, per la loro uniformità di natura; di quella della Geometria, ove di problemi all' estensione pertinenti si tratti, ne' quali l' Algebra è assolutamente passiva e di semplice ajuto; dell' altra della Meccanica in generale, quando a problemi ad essa spettanti l' Algebra si applichi: e come che le quantità di questa sono e debbonsi sempre in ultima analisi valutare, l' Algebra vi agisce però più liberamente; quantunque la Geometria entri sempre in quelli come base fondamentale. E queste cose le intenderà bene chi abbia anche mediocre istituzione in queste diverse branche delle Matematiche; ma esitiamo a credere che vi riescissero i contraddittori.

IV. *Algebra* — Col metodo puro, liberamente operando non trova più ostacoli, e giugne a trattare come sue proprie tutte le quistioni di Geometria e di Meccanica, ponendole prontamente in equazione, dietro il semplice loro enunciato, e senza straniero soccorso, e riducendo tutta la difficoltà alla risoluzione delle equazioni numeriche (*pag.* XLIII.)

Bella questa inversione di cose; prima ogni analista giudicava aver risoluto un problema geometrico, quando fosse giunto ad ottenerne l' equazione, purchè questa non eccedesse il quarto grado; ed un esempio ne dà il La-Grange nel problema di Cramer, che abbandonollo, pervenuto che fu all' equazione per esso, dicendo: *équation qui, étant ordonnée par rapport a l' inconnue s, montera au second degré, et sera par consequent resoluble par la regle et le compas*: ed ora al contrario l' analisi del problema è diventata sicura, e piana, e la difficoltà comincia dall' equazione ottenuta. Dunque l'inventar geometrico non ha più dif-

ficoltà, e nulla più esige dall' ingegno del geometra, bastando solamente che si adoprino quelle magiche formole che immediatamente conducono all' equazione. E poi si ardirà dolersi che l' autor del programma si fosse espresso dicendo, che questi nostri risolutori di problemi, i quali così la discorrono, abbian creduto ridurre il metodo algebrico puro ad arte combinatoria? Or io dimanderò ad essi, perchè tanta difficoltà siesi incontrata, e per sì lungo tempo, da' matematici compilatori degli *annali* di queste scienze, in risolvere il problema de' tre cerchi da iscriversi nel triangolo, come questi medesimi lealmente da veri scienziati confessano, essendo dopo tanti stenti riesciti appena ad ottenere pel raggio dell' un de' cerchi un' espressione da non potersi costruire, ond' è che stimarono darla come un valore (*Vegg. le* Considerazioni *che seguono il programma a pag. 41 e 42*). Ed ancor essi, i garbati risponditori, perchè non hanno con tanta facilità eseguita l' analisi di questo problema; ed avendo adottata la soluzione del Lechmütz, sonosi imbrogliati in modo da non accorgersi neppure del cattivo innesto e falso, che facevanvi del metodo delle coordinate a loro tanto familiare? (*Vegg. l' Analisi critica a p. 162*).

v. *Algebra* — Mediante i nuovi metodi ha acquistato il potere di spiegare i più delicati ed astrusi fenomeni della Natura (*pagina* XLIV).

L' Algebra non è essa che spiega i fenomeni della Natura; ma offre i mezzi onde pervenire a deciferarli: certamente che il più grande algebrista, senza le conoscenze di Ottica non arriverà mai a spiegare lo più ovvio fenomeno dell' ingrandimento degli oggetti mediante un cannocchiale.

vi. *Analisi Cartesiana* — Dee ancor essa ricorrere talvolta alle eliminazioni; e con l' Analisi antica pur anche equivocasi la natura, o il grado di un problema, che però ancor tali metodi sono imperfettissimi (*pag.* LII *e* LIII).

Nell' analisi Cartesiana lo stabilimento di più incognite è elezio-

ne, per rendere la soluzione più elegante, e non già necessità di metodo (*Vegg. il ragionamento del Cartesio al proposito del calcolo da stabilirsi pel principal problema delle Tazioni*); nell' analisi pura è l' intrinseca natura del metodo che vi obbliga. Nella prima, che procede come l'antica con un apparecchio, che mirando sempre alla special natura del soggetto proposto, e delle sue proprietà geometriche, le va successivamente inserendo nella soluzione, può anche cammin facendo farsi sparire un' incognita, trovandosene l' espressione nell' altra; e ciò non può aver luogo nel metodo analitico puro; e quando anche quello non avvenga, le equazioni di condizione col metodo Cartesiano risulteranno per le anzidette ragioni sempre più semplici di quelle, che adopransi senza alcun apparecchio preventivo e particolare nel metodo puro. Inoltre usando il metodo Cartesiano si può convenevolmente costruire il problema per *Luoghi* corrispondenti a quelle equazioni indeterminate relative ad essi.

Ed in quanto al metodo antico, essi non troveranno alcun esempio di equivoco o esitazione sulla natura di un problema, se non vorranno appigliarsi come han fatto alla sola ed unica soluzione di Adriano Romano, del problema de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, che chiaramente mostrò il Newton essere stato difetto del geometra, e non del metodo.

VII. *Analisi inferiore e sublime* — Sono nomi affatto vuoti di senso per l' analista (*pag.* LVII.)

A che dunque si è fatta, e si fa da tutti gli analisti tal distinzione? Dalla continuazione del discorso poi rilevasi, che gli *antiprogrammisti* intendano per *Analisi inferiore* quella *de' finiti*, e per *sublime* quella *degl' infiniti*; e ciò nè anche è esatto: ma era necessario avvertirlo per la seguente dilucidazione sull' articolo proposto.

Si è già osservato nell' *Analisi critica* (*not.* 29.), che l' Eulero distingueva per una stessa ricerca generale quella parte che dovevasene trattare con l' analisi de' finiti, e l' altra, che esigeva neces-

sariamente quella degl' infiniti, nè voleva che l' una e l' altra si confondessero insieme; e lo stesso sentimento hanno avuto ed hanno tutti gli altri matematici moderni. Ma a convalidare, che la distinzione tra analisi de' finiti e degl' infiniti sia reale e necessaria, e non *nomi'*, ricorderemo che que' sommi analisti medesimi, che grandemente promossero quella degl' infiniti, *i* quali considerandola però come loro opera avrebbero dovuto valersene di preferenza, se di tanto poco intendimento fossero stati da pensarla a modo de' contraddittori al programma, non solamente ammisero tal distinzione, ma sforzaronsi di riescire in alcune ricerche, le quali sembravano a prima vista comprese nel dominio del loro nuovo metodo, con l' analisi Cartesiana, o anche con l' antica Geometria. Così vediamo Giacomo Bernoulli aver in pregio la dimostrazione sintetica del problema delle infinite cicloidi, *absque adminiculo infinite parvorum*; come pure il metodo da lui escogitato di determinare i raggi d' osculo nelle curve algebriche *citra ullum differentialium adminiculum*: cui il fratello aggiungeva il suo più semplice dell' ordinario, che conduceva ad una generalissima costruzione *per solas quantitates ordinarias, seu finitas*. E co tui ancora impegnossi a risolvere il problema della curva Caustica, *per vulgarem Geometriam Cartesianam*; e Giacomo gli avvertiva, che il metodo da lui tenuto poteva rendersi generale, ed estendersi *ad determinandas naturas omnium Evolutarum et Causticarum*, conchiudendo in fine: *Geometriam vulgarem, si dextre adhibeatur, posse nonnunquam ad ea quoque problemata extendi, quae absque reconditiore indivisibilium Geometria solvi non posse credebantur*. E poco dopo soggiugnendo: *Speciatim evolutam parabolae expeditiori calculo sic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum r pererat*. Il problema del *minimo crepuscolo* fu pure da essi risoluto geometricamente, ottenendone una soluzione che formava la maraviglia di Giovanni; poichè usandovi il metodo de' massimi e minimi, anche il da lui escogitato, che considerava come lo più breve e faci-

le di tutti gli altri, immergevasi in un calcolo prolisso ed imbarazzante. Similmente dimostrossi egli assai contento di esser riescito ad ottenere una soluzione generale e facile del problema di: *Rinvenire le curve algebriche indefinitamente non quadrabili, che avessero però un numero determinato di spazj assolutamente quadrabili — ex pluribus unam, nullis differentialibus expressam*. Proponeva inoltre lo stesso Giovanni uo teorema per la multiplicazione angolare, e per costruire le tavole trigonometriche, e lodavasi di averlo rinvenuto con *l' analisi comune*; al qual proposito nel cor. IV. in cui esibiva per la tangente la stessa serie altra volta data con l' ajuto del calcolo differenziale, così conchiudeva: *non tamen inconsultum duxi, indicare egregium utriusque methodi consensum, ut Calculo differentialium et integralium per communem Algebram confirmato sua constet validitas*. Ed al proposito del metodo per le quadrature del Craig così esprimevasi: *quae methodus, beneficio aequationum, quas eoinenter continentes appellat, per communem Geometriam, nempe per comparationem terminorum, more* Cartesiano *institutam, peragitur*: e risolveva pur geometricamente il problema del *moto reptorio*. Osserveremo ancora, che lo stesso Gio. Bernoulli, nella nuova soluzione che diede del problema degl' isoperimetri, dopo la morte del fratello, che lo aveva proposto già da circa 20 anni, e pel quale tanto si era acremente conteso tra essi, attribuisca gran merito al nuovo metodo da lui adoperato *corto* e *facile da risolverlo senza calcolo*; e chiuda tal suo lavoro con la soluzione sintetica del problema della più celere discesa.

Saremmo infiniti, se un per uno volessimo recare gli esempj in tal genere tratti delle opere de' Bernoulli fratelli; e però lasciando a chi vorrà istruirsene di riscontrarli in esse, ne aggiugneremo un solo dell' illustre marchese de l' Hopital, il quale impegnossi a risolvere, innestando i principj di Geometria all' analisi Cartesiana, il problema della curva di *equilibrazione*, propostoli dal Sauveur esercitatissimo nel metodo Cartesiano, che dopo molte ricerche e sten-

ti ne aveva abbandonata la soluzione *ob nimiam prolixitatem calculi* : e Giacomo Bernoulli dopo averne data la soluzione con l'analisi degl'infiniti, ne soggiugneva subito un' altra *sine differentialium calculo*. Al che applicatosi ancora il di lui fratello, ed universalizzato il problema, e risolutolo geometricamente, così conchiudeva : *Hic itaque penitioris Geometriae peritissimum Leibnitzium consultum velim, an non certae regulae inveniri possint pro illis problematis, quae in abstracto proposita communem Geometriam quidem respuunt, in concreto autem eandem admittunt; ita ut non opus sit recurrere ad differentialium, integraliumque calculum.*

Avrei ben potuto recar quì le autorità degli analisti sommi ancor più recenti : ma ho volnto principalmente insistere in esempj tratti da' Bernoulli e dall'Hopital ; poichè a contraddire una proposizione esattissima del Fergola sull' importanza che questi sommi matematici riponevano in trattar con la Geometria, o col metodo Cartesiano argomenti che sembravano assolutamente appartenersi all' analisi sublime, si asserisce a capriccio, che ciò facessero per dimostrare l' energia di questa, l'imbecillità di quelli (*p.* xxv) : il che quanto sia vero, le poche cose qui recate sono sufficienti a dimostrarlo. Ma non sarà però superfluo il porre qui innanzi ancora ciò che diceva il distinto analista italiano Pietro Ferroni, nel *Discorso geometrico storico della vera curva degli archi del ponte a S. Trinità in Firenze* : » osservarsi poco a ragione da alcuni algebristi francesi » e svizzeri del passato secolo xviii. adoperato il calcolo, e segnatamen» te infinitesimale, a fine di conoscere il perimetro e centina d' una » parabola conica tosto che venisse descritta per via di tangenti, a» vendosene la derivazione facile ed anche molto più estesa da una » delle proposizioni del terzo libro delle antichissime *Coniche* di Apol» lonio «. Al che potrebbe aggiugnersi il paragone che il Brunacci faceva del lavoro elementare del Pessuti sull' attrazione ne' tubi capillari con quello sublime analitico del Laplace, riportato dal mio collega nell' *Analisi critica*.

E da tutte le suddette cose ognun rileva non solo che non possansi indistintamente adoperare l' analisi de' finiti e quella degl' infiniti ; ma che molto sia valutabile il riescire in una stessa ricarca con la prima , ed ancor più l' ottenerla geometricamente . Ma di ciò non potrà giudicare chi non è avvezzo a trattare le ricerche principalmente geometriche con ogni metodo , perchè non gli conosce. E volendo chiudere questo discorso in modo che rechi alcuna utilità alla gioventù matematica , cui per liberarla da sopraffazioni di false dottrine il dirigo , ripeterò il tante volte detto dal Fergola e dal Flauti , che ove possa adoperarsi la pura Geometria con facilità convenga di preferenza farlo , ove il metodo Cartesiano a questo si ricorra , nè si rigetti la sua riforma modernissima ove si stimi conveniente : e quando il metodo degl' infiniti occorre liberamente si adopri . Che le Matematiche in generale è da' metodi a proposito e convenevolmente adoperati , che traggono alimento pe' loro progressi , e ch' è somma balordaggine il trascurarne anche i più particolari . Finalmente esser di gran vantaggio alle scienze geometriche principalmente , che i risultamenti stessi con diversi metodi si ottengano . Ciò forma il comprovamento vicendevole de' metodi , e la maggior perfezione di quelle ; come saggiamente avvertiva anche il La-Grange nel luogo riportato dall' autor del programma , in fine delle sue *Considerazioni* su questo.

VIII. *Analisi moderna* — I suoi risultamenti non hanno bisogno di esser confermati dall' antica — I metodi moderni poggiano sopra principj chiarissimi e certissimi (*pag.* XXIX.)

Leggi il luogo di Carnot recato dall' autor del programma alla nota (*b*), convalidato dalla condotta di tutt' i sommi analisti, non esclusi il Newton , il Leibnitz , i Bernoulli , l' Eulero , *ec.*, i quali hanno sempre desiderato di veder le loro scoperte fatte con l' Analisi algebrica comprovate dalla Geometria. (*Vegg. il num. prec.*)

I metodi moderni sono tanto più chiari e certi , quando più alla Geometria si avvicinano , sì per la loro origine , che pe' risultamen-

ti cui guidano. La loro vera qualità caratteristica, che gli autori della *risposta* potevan meglio notare, l'è di essere più facili e più attivi.

IX. *Analisti* — Sono nel caso di por mano a ciò che vogliono (*pag.* XVII.)

Essi, nelle ricerche geometriche, hanno sempre bisogno di non iscompagnarsi dalla Geometria; poichè, se non per altro, tutte le forze dell' Analisi algebrica non giungono a poter dimostrare parecchie verità le più semplici e fondamentali della Geometria, nè tempoco a poter dividere una retta, nè meno per metà, a tirare una perpendicolare o una parallela ad una retta data, e ad altri problemi elementarisimi: che però l' Analisi algebrica non ha mezzi da comporre i problemi, ma deve necessariamente improntarli dalla Geometria.

X. *Antichi* — Il loro metodo qual' era? ed in qual libro se ne fa menzione. Essi non avevano alcun metodo generale. — Non avevano metodi espressi per l' invenzione geometrica (*p.* X, XI, XXIV due volte, e *passim* in tutta la *risposta*).

Leggansi le *Collezioni Matematiche* di Pappo, segnatamente nella prefazione al lib. VII, e tutti gli espositori, e restitutori della Geometria antica, con ispecialità l' Halley nella dotta prefazione a' due libri di Apollonio *de Sectione rationis*, ed in quella a' due altri da lui restituiti *de Sectione spatii*; come pure quella del Simson a' libri *de Sectione determinata* dello stesso Apollonio: non che lo stesso Simson nella prefazione alla sua restituzione de' *Luoghi piani* di Apollonio, ove così esprimesi: *Geometras veteres, libros non pauciores triginta tribus analysi inservientes scripsisse auctor est Pappus Alexandrinus . . . . . . idemque iis qui facultatem investigandi problemata acquirere velint libros hosce utiles esse affirmat.* — Finalmente riscontrinsi tutt' i geometri ed analisti dall' epoca della ripristinazione delle scienze Matematiche fino a' nostri giorni; tra' quali Vincenzo Riccati introducesi alle sue *Institutiones analyticae*, dicendo: *Veteres*

graeci geometrae certa quadam analytica methodo procul dubio utebantur, qua scilicet elegantissimis, multumque necessariis inventis scient iam ditarunt. Si riscontri ancora la storia delle Matematiche del Montucla, *Part. I. lib. III.*

Il Castillon nel luogo di sopra citato, entrando anche in tal materia, ma non con persone cha osavan tanto e sì duramente asserire, investendosi de' loro discorsi, ecco come si esprime. » Mais, disent » les modernes, nous, et nous seuls possedons l' analyse, qui est » l'art de trouver la vérité, je reponds vous êtes dans l'erreur. Je » sais bien que vous donnez le nom de méthode analytique à l' Al- » gèbre, et de méthode synthétique au raisonnement des anciens. » Mais les anciens aussi avoient leur méthode analytique. Pour se » convaincre de cette verité, et pour connaitre la nature de l'analy- » se des anciens, il suffit de lire la preface que Pappus a mise à la » téte de son septieme livre; et pour en voir un exemple, de lire » cet auteur, ou Apollonius *de Sectione Rationis*. Le celebre Halley » a bien apperçu l' existence et la nature de cette Analyse. Ce geand » géométra commença par l'Algèbre, dont il fit le plus grand éloge » (*Trans. philos. n.* 223). Ensuite il se mit au fait de l'analyse » géométrique, et il lui donna la préférence. Non seulement il la » qualifie d'excellente (*methodum hanc praestantissimam*); mais il trou- » va fort à regretter que les autres traités d' analyse composés par » les anciens, et décrits par Pappus soient perdus, ou encore ignorés. » Les livres que les anciens ont écrits sur l' analyse montrent qu' elle » tendoit au même but que l' Algèbre, qui ne sert qu'à la solution » des problémes . . . . Ces livres sont une » preuve incontestable que les anciens avoient l' analyse, et qu' il » ne la tenoient pas cachée, comme quelques modernes l' ont supçon- » né. Et comment auroient-ils pu la tenir cachée? Elle ne le pou- » voit être, que pour ceux qui ne la vouloient pas appercevoir; » puisque elle étoit toujours la synthése renversée. Ils avoient donc

» l'analyse ; mais ils ne la montroient que dans quelques ouvra-
» ges qu'il lui consacroient, parce que ils étoient d'avis que la syn-
» thése seule méritoit de paroitre aux yeux du public. C'etait ega-
» lement la pensée de Newton «.

E volendo ancor di più suggellare il presente argomento con l'autorità del Newton, ripeteremo con l'illustre autore della di lui vita premessa a' suoi *Opuscoli* : *Newtonnus praecipue Hugenium commendare solebat, quem recentiorum elegantissimum, et optime Veterum imitatorem nuncupabat, quos tamti faciebat ut dicere soleret, nihil necesse futurum de Geometria, atque ideo de universa Mathesi scribere, si Veterum commentationes ad nos pervenissent*. E l'Ugenio fu appezzatore anche dell'Analisi Cartesiana, a del metodo degl'infiniti, come per buona fortuna i contraddittori hanno mostrato non ignorare.

XI. *Antichi* — Che non avessero posseduto alcun metodo generale è stata l'opinione di Cartesio, di cui recasi un luogo della sua Geometria (*pag.* x *ad* XI.)

Un tal luogo non riguarda affatto l'analisi geometrica, ma la composizione de' problemi piani, precisamente quelli or detti del secondo grado; e però non fa al caso di cui trattasi da' non conoscitori del metodo degli antichi : e riguardo a tal luogo riscontrisi lo scolio dell'Halley in fine del lib. I. di Apollonio *de Sectione rationis*, e la nota alle prop 28 e 29 lib. VI. dell' Euclide del Flauti.

XII. *Antichi* — Il loro metodo restringevasi al solo e semplice principio di Platone, del *supponatur factum quod est in quaestione*. Ma la condotta da tenersi nell' istituir l'analisi, e nello sviluppo delle conseguenze era tutta a carico del talento e dell'industria del geometra (*pag.* x).

Era dunque quel principio come l'onnipotente Fiat, che pronunziò il Creatore Sommo Iddio, e nacque l'Universo. Se così potente era quel principio da se solo, certamente che invano si sono affa-

ticati i moderni in facilitare i metodi per l' invenzione geometrica.

Si riscontri Pappo nel principio della prefazione al lib. VII, ove dopo aver enumerati i libri analitici degli antichi, de' quali una parte serviva all' analisi de' problemi e l' altra alla sintesi, entra a descrivere, l' una l' altra. I contraddittori non potevano averne conoscenza, poichè essi non perdono il tempo su questi libri divenuti ormai per loro inutilissimi; ma pure avrebbero potuto raccoglier lo stesso dalla prefazione del nostro professore Scorza alla sua opera sull' Analisi degli antichi, che per grandissima loro bontà han dimostrato aver alla sfuggita scorsa: nè poi è prudenza discorrer sì francamente di quello che s' ignora. È indubitato che semplici e piani erano i precetti per l' analisi geometrica, e che un tal metodo prezioso lascia largo campo alla perspicacia del geometra; ma non mancava esso di regole generali, e di norme stabilite, come coloro che lo coltivano ben conoscono, e sanno valutare; e questo suo andamento, che 'l rende tanto più nobile e preclaro per coloro che sanno apprezzarlo, faceva all' analista Bossut dargli l' epiteto di *bella sintesi*, comprendendo, come suole ordinariamente farsi, sotto questa voce, l' intera soluzione di un problema col metodo degli antichi. Ma è veramente curioso, che questi nostri contraddittori arrivino a persuadersi, che si possa riescire a risolver problemi, e problemi difficili, senza un metodo per risolverli! Appena ciò sarebbe condonabile ad un idiota cabalista.

XIII. *Antichi* — Non avevano metodi. E se l'autorità del Cartesio non bastasse a convincerci, che gli antichi non avevano metodi espressi per l' invenzione geometrica, potremo incontrastabilmente argomentarlo in questo che i geometri moderni col principio generale dell' analisi geometrica, e con quanto dell' antica Geometria è giunto fino a noi hanno divinato le opere più difficili dell' antico *Luogo Risoluto* (*pag.* XI.)

Dell' autorità di Cartesio si è già detto al num. XI: e per riguardo all' altro argomento, ch' è veramente degno de' contraddittori al programma, osservisi, che i moderni non poterono giugnere a restituire alcuni libri del *Luogo Risoluto*, se non dopo che ebbero innanzi, e meditato lungamente sulle opere di Euclide, di Archimede e di Apollonio, che fortunatamente ci sono pervenute, e sulle *Collezioni Matematiche* di Pappo, che non solamente contenevano grandi materiali per la conoscenza del metodo degli antichi, ma che de' libri del *Luogo di risoluzione* davano distinta notizia; e dietro questa, e tenendo ancor presenti i libri analoghi, che di tal *Luogo* ci erano rimasti, riescirono a grande stento a restituirne pochi altri. Di tal che per quelli de' quali mutilato dal tempo era stato il testo di Pappo, la restituzione non si è potuto affatto operare, e dubbia n'è rimasta quella che se n'è fatta.

Ma non erano questi soli libri degli antichi, che costituivano tutto il prezioso materiale per l' invenzione geometrica co' loro metodi; poichè da' medesimi non si rileva gran parte di que' principj sicuri ch' essi avevano per la classificazione de' problemi; dal che i signori contraddittori hanno preso espediente di negargliene ogni conoscenza. Nè tampoco conosciamo tutti que' lavori, che quelli avevansi preparati per le linee curve in generale e per le loro intersezioni; e lo stesso per le superficie curve, delle quali non possiamo negare che molto se n' erano e con successo occupati (*Vegg. la nota (a) al programma in principio*).

XIV. *Antichi* — Newton, Ugenio, Maclaurin, *ec.* con questi semplici mezzi, e con quel poco che dell' antica Geometria è giunto fino a noi, in cose di ben altra importanza che quelle trattate dagli antichi, hanno fatto operare alla Geometria effetti maravigliosi (*pag.* XI.)

Questo è veramente magnifico argomento, che presentano i rispon-

ditori al programma, per provare che gli antichi non avevano metodo. E se costoro, che nominansi, hanno tanta fortuna da essere ancor tenuti da' nostri trascendentali risponditori in concetto di sommi uomini, che hanno conosciuto e saputo adoperare quel metodo, o pure valersi di que' *semplici mezzi*, *e di quel poco che a noi è giunto dell' antica Geometria*, *per produrre effetti maravigliosi*; perchè non ascoltarli in ciò che degli antichi e de' loro metodi altamente hanno predicato?

XV. *Antichi* — Con la sola naturale attitudine senza metodo generale ridotto a regole definite e sicure, pervennero allo scoprimento di tante verità ed alla risoluzione di tanti problemi, nel che furono certamente ammirabili (*pag.*XI *e* XII.)

I compilatori di questo articolo, han convenuto de' risultamenti, ed hanno negati i mezzi che quelli vi adoperavano, perchè non gli erano conosciuti, e gli facevan consistere in quello che non sono; poichè cosa mai vorranno essi intendere per *regole definite* e *sicure* dell' analisi geometrica. Bisogna non aver mai trattata la soluzione del problema lo più elementare di Geometria per discorrerla a questo modo vago ed insussistente.

Del resto si confronti questo articoletto con tutte le insolenti proposizioni de' numeri precedenti, e che seguiranno, relativamente al metodo degli antichi, che questi possedevano certamente compiuto ed assai più perfetto, che non hanno potuto con tutti i loro grandi sforzi ridurlo i geometri moderni, e si vegga se coloro che hanno scritta la *risposta* avevano il solo e puro senso comune.

XVI. *Antichi* — Essi non conoscevano la classificazione de' problemi (*pag.*XII).

Leggansi tutte le loro opere, e specialmente il luogo di Pappo dopo la prop.30 lib.IV. — Vegg. le prop.28 e 29 El. VI. di Euclide e le 58 e 59 del libro *de' Dati*, ed i comentarj su di esse, principal-

mente quello del nostro prof. Flauti alle suddette prop. 28 e 29; e riscontrisi il Montucla nella sua *Storia delle Matematiche part. I. lib. III.* Inoltre recheremo qui ciò che ne dice il Fermat: *Problematum geometricorum in certas classes distributio, non solum veteribus, sed et recentioribus necessaria visa est analistis.*

Ma in tanta materia che abbiamo su di ciò in pronto noteremo qui il solo seguente luogo dell' Halley, nella sua più volte citata prefazione, ove dice: *Haec de Apollonii libello jam primum in lucem edito, ex quo satis liquet, quo pacto* Veteres, *adhibitis proportionalium, proprietibus, Problemata plana ad aequalitatem duorum rectangulorum deducebant; quorum alterum quidem datum erat, alterius vero laterum summa, vel differentia. Neque ulterius in exequenda compositione progressi sunt, quia in sexto Elementorum prop. 28 et 29, et in prop. 58 et 59, iterumque 84 et 85* Datorum Euclidis, *rectangulum datum excedens, vel deficiens quadrato, ad datam rectam applicare docemus; quae quidem Effectiones coincidunt cum* aequationum quadraticarum *(uti nunc loquimur) constructionibus geometricis. Methodus haec cum* Algebra speciosa *facilitate contendit, evidentia vero et demonstrationum elegantia eam longe superare videtur: ut abunde constabit, si quis conferat hanc* Apollonii *doctrinam de* Sectione Rationis, *cum ejusdem problematis Analysi Algebraica, quam exhibuit clarissimus* Wallisius *t. II. oper. Math. cap. LIV. pag. 220.* E lo stesso presso a poco ripete nello *scolio generale* in fine del lib. I. *de Sectione Rationis*. Si riscontri anche il Newton nella sua *Aequationum constructio linearis.*

In fine non possiamo fare a meno di maravigliarci, che i contraddittori, mentre citavano il Cartesio su tal proposito, disgraziatamente essendosi imbattuti in questo solo luogo della sua *Geometria*, ove questi aveva ancor egli dimostrato esser uomo, non abbiano poi avvertito, che costui nel principio del lib. II. manifestamente dica: *Veteres optime considerarunt, quod Geometriae problematum alia sint* Plana, *alia* Solida, *alia denique* Linearia; *hoc est quod quaedam co-*

rum construi possunt, *ducendo tantum rectas lineas et circulos; nam alia construi nequeunt*, *nisi ad minimum adhibeatur Conica aliqua sectio*; *ac reliqua denique*, *quin ad constructionem eorum assumantur aliae quaedam lineae magis compositae*. Dunque i contraddittori non pur non si sono degnati leggere alcuno degli antichi geometri, partendo dal principio che alcuna scienza essi non avessero, e che nulla si potesse raccogliere dalle loro opere; ma nè meno hanno avuto riguardo al Cartesio padre della moderna analisi geometrica; tutta la loro scienza rimettendo in qualche istituzione di analisi pura. E con queste armi si fanno arditi a combattere!

XVII. *Antichi* — Aver tutto trovato alla ventura (*pag.* XVI.) — Essi camminavano a tentone (*pag.* XVII.)

A parte di tutto il già detto precedentemente, il che distrugge sì sciocca opinione; secondo gli autori della risposta, dal *Caso* sarebbero nati i primi prodotti dell' umano ingegno, guardati con estrema maraviglia per lo spazio di ben più di venti secoli, sebbene giunti a noi con tante imperfezioni; ed intorno a' quali si sono sforzati a riempierne i vuoti, o imitarli tutti i più grandi matematici de' nostri tempi. Il *Caso* avrebbe dunque prodotto la Geometria di Euclide, parto lo più rispettabile e perfetto dello spirito umano; ed avrebbe ancora fatto meritare ad Archimede il titolo di divino, e di principe de'geometri. Il *Caso* avrebbe anche fatto loro ottenere l' intento per ricerche propostegli! È veramente curioso, che il *Caso* avesse fatto risolvere in tanti modi il problema della *duplicazione* del cubo, solennemente proposto: ed è pur singolare che nella scuola di Platone vi s'istituisse a trar profitto dal *Caso*, ed a risolver problemi *alla ventura*. Non mai la fantasia dell' Ariosto gli avrebbe fatta sognare una simile maniera di istituire. Facciam voti perchè le nostre attuali ricerche abbiano tanta vita, e sieno costantemente ne' secoli avvenire tenute in quella considerazione, che le prodotte dal *Caso* per opera degli antichi.

Per finirla, gli ripeteremo col Montucla: » Mais ceux qui con-

» noissent la Géométrie seront qu'on n'y devine pas, et que quand
» on trouve la vérité dans des qnestions aussi difficiles, c' est qu' on
» a pris un chemin sûr pour y arriver (*part. IV. lib. VII. p. 477.*)

XVIII. *Antichi* — Gli uni non conoscevano le ricerche degli altri (*pag.* XXXIX).

Ecco una delle solite ispirazioni, che provano che il CASO a chi parla senza istruirsi fa dire errori, e non è mai fonte di verità. Per convincersene leggansi le lettere di Archimede a Dositeo, donde rilevasi la corrispondenza che prima teneva con Conone, di Apollonio ad Eudemo e ad Attalo, di Sereno Antissense a Ciro, di Pappo a Cratisto e ad Ermodoro suo figliuolo, di Tolomeo a Siro suo fratello, e ad Eristone suo figliuolo; *ec.* Ed è mai immaginabile, che coloro i quali istituivansi in una medesima scuola, se non con altri, non comunicassero insieme i loro trovati. Aggiungasi che in tutta la scuola greca non troviamo, che esempj del comunicar continuo di que' profondi scienziati tra loro. E solamente gli concederemo tal proposizione, se vogliano essi intendere, che que' nostri rispettabili maestri non ci abbiano lasciato alcun esempio di contese geometriche, principalmente sì scandalose come quella che ci vediamo costretti a trattare.

XIX. *Antichi* — Si contentavano di risolvere il problema nel senso dell' enunciazione, e tralasciavano di discutere il significato delle diverse soluzioni esibite dalle intersezioni delle locali (*pag.* XII).

Quando si è detto che essi non avevano metodo, e poi che tutto consisteva a qnel generalissimo principio di Platone, potevansi risparmiare tutto l' altro treno di spropositi, che hanno ripetuti, e vanno ripetendo. Del resto:

LEGGANSI le diverse opere rimasteci del loro *Luogo risolato*, e specialmente quelle *de Sectione determinata*, *Rationis*, *et Spatii* esistenti, o restituite dietro le indicazioni di Pappo, ove si troveranno fino alla noja considerati i casi, le soluzioni, e quelli ch' essi dicevano *epitagmata*, cioè disposizioni di punti, da arrivare fino a compiere

con due problemi soli due libri, tanto per quelli *de Sectione Rationis*, che per gli altri *de Sectione Spatii*, e *de Sectione determinata*.

Se poi per ciò che dicesi *senso dell' enunciazione* intendasi, che essi non dipartivansi dalla natura del soggetto proposto in quistione, ne avevano ben ragione; ed è ben mostruoso, che proposto il problema in un modo determinato, se ne derivino come casi di esso quelli che appartengono ad un soggetto affine, che può esser suscettivo per la posizione de' dati anche di una soluzione diversa. Se ciò si vuole, chi impedisce di enunciare il problema generalmente? Al certo che proponendosi Euclide d' iscrivere il cerchio in un dato triangolo, non doveva pensare agli altri tre cerchi tangenti ciascun lato di tal triangolo e i rimanenti due prodotti, i quali non sono compresi nell' enunciazione speciale; che ciò volendo, si sarebbe espresso col dire descrivere un cerchio tangente tre rette date. E questa maniera impropria di render le soluzioni de' problemi più generali dell' enunciato, può spesse volte indurre in forti equivoci; come se ne vede un esempio accennato dall' autor del programma nelle *Considerazioni* a *pag:* 68.

XX. *Antichi* — La Geometria presso loro era molto imperfetta (*pag.* XV.)

Così è per chi non conosce le loro opere: ma non han detto in questo modo tutti i matematici dal rinascimento di queste scienze, pe' quali basterà recare un solo luogo dell' Halley: *Quamvis de scientiis mathematicis, hac nostra et superiori aetate praeclare meruerint viri eruditi, qui* Algebram Speciosam, Arithmeticam infinitorum, *nuperamque* Fluxionum *doctrinam adinvenerunt et excoluerunt: nihil tamen inde Veterum gloriae detrahitur*, QUI GEOMETRIAM AD EAM PROVEXERE PERFECTIONEM, QUAM FACILIUS FORSAN FUISSET POSTERIS MIRARI, QUAM ABSQUE ANTIQUORUM SCRIPTIS INVESTIGANDO ASSEQUI. Ed è pur questa l' opinione che ne hanno avuta e ne hanno tutti i matematici, e ne avranno: nè poteva pronunziarsi una simile sciocchezza da chi avesse an-

che appena delibati gli *Elementi* soli *di Euclide*. (Si riscontri anche il luogo della vita del Newton riportato nel n. IX.)

Ma a mostrare qual conto debba tenersi delle ispirazioni degli autori della *risposta*, ce ne appelleremo a loro medesimi, i quali a *pag*. XXXIX dicono: *i greci* (cioè gli antichi geometri) *resero la Geometria una scienza perfettissima.*

XXI. *Antichi* — Per non introdurre nella Geometria l'idea degl' infinitesimi, e de' limiti hanno fatto sì che le loro dimostrazioni riescissero pesanti (*pag*. XXIV.)

Essi usarono, in alcune loro ricerche, il metodo de' limiti anche prima di Archimede (Vedi *Flauti* nella nota alla prop. 2. XII. di Euclide, e nell' altra al *discorso preliminare* al libro di Arch. *sulla Sfera e sul Cilindro*); ma abborrirono dal servirsene nel dimostrare le verità dopo averle rinvenute, ricorrendo a mezzi indiretti. E se ebbero ragione di così fare il dimostrano abbastanza le lunghe ed intralciate quistioni sulla metafisica degl' infinitamente piccoli, che non sarebbero terminate, se in appoggio non fossero venute quelle *dimostrazioni pesanti* degli antichi, con le quali veniva per istrada la fede che troncava ogni difficoltà senza spiegarla. Ed è però necessario, che per formare ne' giovani lo spirito di rigore e di esattezza, non si tralasci di fortificarli a tempo con quelle *dimostrazioni pesanti*. Newton e Leibnitz furono gl' inventori del calcolo degl' infinitesimi, e pure stimarono al più alto grado le opere di Euclide e di Archimede, ove principalmente osservansi quelle *dimostrazioni pesanti*: e tutt' i sommi matematici contemporanei, ed ancor posteriori hanno similmente pensato, e pensano.

XXII. *Antichi geometri* — Degni sol di rispetto, perchè nell' infanzia della scienza pervennero a risultamenti maravigliosi (*pag*. LXIV *e* LXV.)

I secoli dunque di Euclide, Archimede, Apollonio, per non

dire di quelli che gli precedettero, e seguirono, furono secoli d'infanzia della Geometria. A questo discorso non v'è risposta. Nessun de' moderni aveva però veduto in ciò sì chiaro; ed anche il Newton ed il Leibnitz si sono grandemente ingannati in giudicarne diversamente (Rileggansi il luogo della vita del Newton al *n. x.* e quelli dell' Halley a' *n. xvi* e *xx*).

xxiii. *Antichi* — Presso essi le matematiche riducevansi alla sola Geometria (*pag.* xxvii.)

Leggansi il discorso con cui Pappo indrizza al figliuolo Ermodoro l'VIII° libro delle sue *Collezioni*, i libri di Archimede *de aequiponderantibus*, e *de insidentibus in fluido*, de' quali è singolare che faccian menzione gli stessi autori della *risposta* a *pag.xxxix*; i trattati di *Ottica* di Euclide e de' *Fenomeni*, ec.

Gli antichi fecero quell'uso della Geometria nella Meccanica in generale e nell' Astronomia, che le conoscenze di queste scienze permettevan loro; che sicuramente non potevano operarvi quello che dal Galilei cominciossi, e dal Newton fu perfezionato; e che poi con l'ajuto de' nuovi metodi solamente poteva esser elevato a quell' alto grado, che eccede ancora i limiti del necessario ed utile. Se la Fisica non era perfezionata, inutile sarebbe risultata ogni applicazione alla medesima della Geometria; che per altro essi forse, persuasi de' difetti di quella, amavan di coltivare piuttosto speculativamente, che applicarla.

xxiv. *Antichi* — I porismi di Euclide non avevano tanta importanza (Not. a *pag.* xxviii.)

I compilatori ne sanno più di tutt' i sommi geometri antichi, mentre Pappo, seguendo la mente di tutta la scuola greca, così introducesi a descriverli: *Collectio artificiosissima multarum rerum, quae spectant ad Analysin difficiliorum et generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam praebet Natura ..... Habent autem subtilem et naturalem contemplationem, necessariamque et maxime universalem, atque iis qui singula prespicere atque investigare volent admodum jucundam*. La lo-

ro grandissima importanza viene anche comprovata dall' impegno che Pappo stesso prendesi in definirne la natura, e la diversità in certo modo dagli ordinarj problemi e teoremi, non che dallo studio che su di essi, più che su qualunque altro argomento del *Luogo di risoluzione*, facevasene nella scuola greca fino a' tempi di Pappo; ed il Montucla parlando di essi così esprimesi. » De tous les ouvrages géométriques d' *Euclide*, le plus profond, et celui qui sans doute lui feroit le plus d'honneur s'il nous étoit pervenu, ce sont ses trois livres de *Porismatibus*.

Tra' moderni molti si sforzarono a restituirci la materia de' porismi, essendosi disgraziatamente perduti que' tre libri che ne aveva composti Euclide, e tra essi i principali ad affaticarvisi sono stati il Fermat, che non tralascia di ripeterne l' altezza del soggetto, conchiudendo, che: *si haec paucula, quae isagogica tantum et accuratioris operis prodroma emittimus, factis arrideant, tres porismatum libros aliquando restituemus, imo et Euclidem ipsum promovebimus, et Porismata in coni sectionibus et aliis quibuscumque curvis mirabilia sane et hactenus ignota detegemus*. Il Fermat dunque, grande emulo del Cartesio, e geometra insigne, al quale debbono non poco i metodi moderni, riconosceva assai l' importanza de' porismi per l' invenzione geometrica, da desiderare che se ne promovesse la materia oltre quello che aveva fatto Euclide, inventandone ancora per le sezioni coniche, e quindi per lo scioglimento de' problemi solidi. Ma l' Halley, che forse se ne sarebbe occupato, ne trovò la descrizione di Pappo assai oscura, per potervi riescire con buon successo, ond' è che si ritenne dal porvi mano: al che accintosi con indefesso lavoro il suo connazionale Roberto Simson arricchì finalmente la scienza geometrica di un egregio trattato su tale argomento, che se a dirittura non ci avesse anche restituito il lavoro sublime di Euclide, ha però presentata ai geometri un' opera in quel genere di molto rilievo, e degna di gran considerazione. Nè con tutto ciò sonosi rimasti i matematici posteriori dal cercar di approfondire un tale argomento; sicchè ancor dopo

l' Accademia di Edimburgo occupossi di un lavoro su tale soggetto del dotto suo socio Playfair , che trovasi inserito nel vol. II. delle sue *Transazioni Filosofiche* , del quale non ha sdegnato darne un saggio l' illustre Lhuilier , nella sua dotta opera dell' *Analyse géométrique, et de l' Analyse algébrique.*

Ma tutte queste ragioni non sono di alcun peso pe' contraddittori al programma , i quali hanno deciso assolutamente non solo dell' inutilità , ma anche dell' inettezza de' *porismi* . Tant' è vero , che per gl' ignoranti non v' ha difficoltà alcuna , anche in quelle materie nelle quali i dotti ne incontrano grandissima.

xxv. *Antichi* — Non avevano risoluto il problema delle quattro rette , come chiaramente Pappo afferma; ed il Newton dopo aver risoluto in pochi tratti il problema delle quattro rette , soggiugne : *atque ita problematis Veterum de quatuor lineis a b Euclide incoepti et ab Apollonio continuati non calculus , sed compositio geometrica qualem Veteres quaerebant in hoc scholio exhibetur*. (Vedi pagina xiii. e la lunga *nota* a pag. xiii , xiv e xv.)

Il problema delle quattro rette non entrava per le mille nell' argomento presente del Programma , nè per dritto , nè per traverso ; ma i contraddittori ad esso non hanno tralasciato di frugare nelle opere del Fergola , e di alcuni di sua scuola , non per trarne materia di loro migliore istruzione , ma per farne da inconsiderati aspro trattamento : quantunque ci abbiano per appunto al proposito presente posta innanzi la massima , che i *sublimi ingegni non hanno bisogno di reprimere gli altri per innalzare se istessi* , alla quale noi soscrivendo , la terremo come la *maggiore* di un sillogismo da rivolgerlo a loro conto , lasciando ad essi medesimi il compierlo.

Or dunque aveva il Fergola , interpretando , con giudiziosa e fina critica, il passo della prefazione al lib.VII. delle Collezioni di Pappo,

dimostrato aver dovuto Apollonio assolutamente compiere il *luogo alle tre ed alle quattro rette*; ed i contradditori dovevano però dire il contrario: e noi di ciò non prenderemo alcuna briga, rimettendocene a dirittura al ragionamento del Fergola dal §. 100 al 108 de' suoi *Luoghi geometrici analiticamente trattati*, ed al dotto lavoro del nostro professore Scorza su quel famoso ed importante problema dell' antichità. E riguardo al luogo del Newton, che essi ne riportano, ci permetteremo osservargli, che costui con quel *non calculus numericus*, era al Cartesio che si dirigeva; nè per siffatta maniera intendeva deprimere il merito di un grand' uomo, che per tale certamente egli teneva il Cartesio: ma per dar esca a quella gloriuzza de' dotti, che fa loro operare grandi cose, e che i nostri modesti contradditori non riconoscono; mentre nella loro gratuita risposta, di cui hanno onorato il Programma, hanno spinta la loro sciocca critica sino alla più ridicola impertinenza, verso quanto ha di meglio nelle Matematiche il loro proprio paese.

Ma il Fergola, rivindicata ad Apollonio la soluzione effettiva del problema *delle quattro rette*, così ripigliava a dire: » E pure il » Cartesio, checchè ne fosse cagione, scrisse categoricamente, che il » problema delle quattro rette non fu sciolto da' geometri antichi co' » principj loro «; ed è questo appunto il luogo che ha meritato, or ch' egli non può più profittarne quel pio avvertimento de' nostri modesti risponditori. Essi dunque ci dicono, che avendo su tal proposito riscontrata la Geometria del Cartesio, » ponendo mente a quanto l' au- » tore espone dalla pagina settima sino alla dodicesima, vi hanno » scorto che questo grand' uomo non abbia mai pensato di togliere » ad Apollonio la gloria di aver risoluto il problema delle quattro » rette, nè punto asserisce che ci voleva il suo metodo per risolverlo «. E poichè noi ci troviamo aver messo sventuratamente il piede nell' esame di sì puerile e sciocca *risposta*; conviene che non tralasciassimo di convincerli, anche in ciò che non vi appartiene, del loro grosso

errore; e speriamo che almeno ne traessero profitto per l' avvenire, educandosi ad essere più attenti a pronunziar giudizj contro nomini distinti, e specialmente il Fergola, che talnno de' consiglieri del Padula, e primo collaboratore alla *risposta*, conosceva bene quanto fosse accurato ed esatto ne' suoi giudizj, e che non parlava mai a caso, nè audava a riscontrare le pagine di un classico autore di sua scienza, poco anche intendendone la lingua in cui era scritto, per trarne materia da inonesta censura; ma l'aveva precedentemente assai studiato, e meditatovi sopra. Il Cartesio dunque, nell' introdursi a trattar quel problema famoso degli antichi geometri manifestamente dice: *quam* (*quaestionem*) *nec Euclides*, *nec Apollonius*, *nec quisquam alius penitus resolvere potuerat*. E dopo aver riportata l' enunciazione del problema con le parole stesse di Pappo, ed estesolo però a più di quattro rette, così ripiglia: *Quaestio itaque quam Euclides resolvere inceperat atque Apollonius continuaverat*, SED QUAE A NEMINE FUIT PERFECTA. Dal che risulta non attribuir egli a questi due sommi geometri altro merito, che di soli infruttuosi tentativi più prolungati da Apollonio che da Euclide: ed è contro questo luogo precisamente che il Fergola dirige il suo ragionamento, guidato da sanissima critica ne' §§. 101 e 102 de' suoi *Luòghi Geometrici*. Dopo ciò il Cartesio passa di nuovo ad enunziare una tal quistione generalmente, e poi così ripiglia: *Dicit autem Pappus*, *si tantum 3 aut 4 lineae dentur lineam illam tunc aliquam ex sectionibus Conicis existere*. VERUM NON SUSCIPIT IPSAM DETERMINARE NEQUE DESCRIBERE . . . .

E da questi luoghi del Cartesio non rilevasi certamente che il Fergola avesse sognato aver tal sommo uomo opinato, che il problema delle quattro rette non fosse mai stato dal grande Apollonio compiutamente risoluto; e però averlo voluto quasi a volontà adontare: nel che avverasi, che ciascun giudichi da se degli altri. Ma quello ch'è poi curioso stà in vedere, che soggiugnendo il Cartesio poco do-

po: *Quod occasionem mihi praebuit tentandi num illa*, *qua utor*, *methodo*, *AEQUE LONGE*, *quam illi pervenerunt*, *progredi liceret*, il qual luogo poteva in qualche modo stiracchiarsi da' contraddittori al caso loro, essi se lo abbiano rivolto contro, con tradurre *aeque longe* per *molto più innanzi*: del che ne lasceremo cura a' Grammatici.

In fine, poichè essi dalle sole pag. 7 a 12 riscontrate fugacemente nella Geometria del Cartesio, non sono abbastanza rimasti persuasi, che l'opinione che questi ebbe della soluzione di quel problema riguardo agli antichi, sia come il Fergola l'ha annunziata, il credano almeno allo stesso Cartesio, il quale così scriveva al Mersenno: *Ego vero in animum non induxerim inhaerere explicationi cujuspiam rei per alios authores olim cognitae; neque reparare libros Apollonii perditos, uti Vieta*, *Snellius*, *Marinus Ghetaldus*, *etc.*; *sed saltem transilire omnia latera*, *uti perspectum dedi incipiendo per quaestionem quae Pappo teste A NEMINE VETERUM POTUIT INVENIRI; et eodem componendo*, *et determinando omnia loca solida, id quod Apollonius adhuc investigabat...* (*Epist.48. III*). Ma forse i nostri contraddittori ignoravano pur l'esistenza delle epistole del Cartesio.

Assoluta questa parte di nostre osservazioni sulla erronea e sciocca censura fatta al Fergola, ci rimane ancora a dir qualche cosa sull'altra non meno infelice contro lo Scorza, cui, quando voglia negarsi di aver nel modo vero degli antichi adempito alla quistione *delle tre e quattro rette*, bisogna dichiararsegli grati, e riconoscere come di gran merito il suo geometrico lavoro. Ma egli ha preteso che tutt'i problemi degli antichi là si riducessero (e ciò com' essi dicono per voler onorare que' sommi uomini di un supposto metodo)? e bene, non volendo noi entrar su di ciò in disputa, che non è il luogo, e ben ci rincresce di aver annojato i nostri lettori con troppo lunga diceria, non potranno però negargli la possibilità di un tal concetto; e quindi di maggior merito lo rivestiranno, per avere ancor prodotto oltre il metodo degli antichi geometri. Allora però, vo-

lendo spiegare la grande importanza, che diedero gli antichi a problema sì famoso, converrà necessariamente concedere l' altra ragionevole congettura dello Scorza, che un tal problema servisse loro di convenevol mezzo *da classificare le curve algebriche*; e quindi converrà riconoscere quello che i nostri contraddittori gli avevano assolutamente negato, come dal seguente numero XXIX. si rileva.

XXVI. *Antichi* — Ebbero appena imperfetta conoscenza de' problemi lineari (*pag.* XII.)

A noi così pare, poichè oltre quello della multisezione angolare non ce n'è pervenuti altri. Ma ripeteremo il già detto tante volte, che la parte trascendente di loro Geometria non è affatto a noi giunta, e ciò naturalmente doveva avvenire; poichè avendo meno coltivatori, minor numero di esemplari di tali opere ne furon trascritti. Ma pure sappiamo, ch' essi francamente distinguevano i problemi in generi, e ne ascrissero al terzo i lineari; e ritrovando noi che alcune curve ci sono pervenute di quelle proprie a risolverli, e da essi grandemente considerate, non possiamo però affermare senza temerità, che le conoscenze in tal genere di problemi fossero state imperfettissime. Ad ogni modo se essi rivivessero, avrebbero ragione di dimandare a noi, quali sono i metodi geometrici, che possediamo a più di loro, per risolvere un tal genere di problemi?

XXVII. *Antichi* — Non ebbero idea distinta delle intersezioni delle linee (*pag.* XII.)

Il libro IV. de' Conici di Apollonio, che ci è pervenuto, ed il trattato, che sappiamo aver composto Filone Tianeo col titolo *de linearibus aggressionibus*, che tenevasi di molta importanza, provano in contrario. E forse essi dovettero su tal materia meditare più che non facciamo noi, sebbene con metodi assai più facili; poichè forse dalle intersezioni delle locali venivano anche ad assicurarsi della natura, e del grado de' problemi, su di che sappiamo da Pappo che giunsero a trovar mezzo, che non gli lasciava esitazione.

XXVIII. *Antichi* — Que' luoghi a cui gli antichi riducevano le loro soluzioni, non potevano esser tanti, quanti ne possiede ora la moderna Geometria analitica, e la Descrittiva (*pag.* XII *e* XIII.)

Il metodo degli antichi non aveva una riduzione de' problemi nel genere come quella che offre l'analisi algebrica, ed allora necessariamente il numero de' luogi geometrici preparati per la composizione de' problemi, doveva esser maggiore di quello che a' moderni bisogna: di fatti, chi è esercitato nell' uno e nell' altro metodo conosce non posseder la Geometria analitica un numero di luoghi pari a quello de' *Luoghi piani* di Apollonio pe' problemi di questo genere, o de' *Luoghi Solidi* di Aristeo Seniore pe' corrispondenti problemi; nè averne però bisogno. Oltre a ciò sappiamo solamente, senza conoscer cosa fossero, che Euclide aveva composti tre libri su' *Luoghi alla superficie*, che venivano nel *Luogo di Risoluzione* dopo i *Luoghi Solidi* suddetti; il che basta a comprovarne l'altezza e l'importanza: e forse essi eran materia per la composizione de' problemi lineari. Con tanto vuoto di loro opere, e sì imperfettamente essendo a noi riescito penetrare ne' loro metodi, come potrà farsi parallelo tra' loro luoghi geometrici, ed i nostri, molto più da chi non mostri avere perfetta idea di *Luoghi geometrici*: chè una semplice proprietà, o la descrizione di una linea, o di una superficie, non ne costituisce un *Luogo geometrico*, come dalla conchiusione del passo riportato par che s' indichi: nè ciò basta, se prima non se ne dimostri l' uso a proposito nella composizione geometrica de' problemi.

XXIX. *Antichi* — Non valsero a distinguer le linee in varj ordini (*pag.* XII.)

La sana critica non permette di attribuirgli ciò che quì francamente negasegli, nè di negarglielo senza fondamento. A noi nulla è pervenuto degl' immensi lavori ch' essi fecero sulle linee curve, e non sappiamo del problema delle quattro, o più rette che uso facessero

(*Vedi l'art. prec.*). Quello che possiamo sicuramente asserire si è, ch' essi non poterono riescire in tale argomento con quella facilità che ne offre l' analisi algebrica.

XXX. *Antichi* — Ignoravano l' enumerazione delle linee del terzo e del quarto ordine fatta da Newton e da Cramer (*Newton fece solamente quella del terz' ordine* ; *e potevasi al Cramer aggiugnere l' Eulero*). E rispetto al luogo alle superficie (*piuttosto luoghi alla superficie*) neppure sospettavano che esistessero l' ellissoide, l' iperboloide, ed il paraboloide non di rotazione, superficie tanto utile e fornita di bellissime proprietà . . . . Non conoscevano le superficie sviluppabili, le superficie rigate, le superficie d' inviluppo, e tante e tante altre superficie possedute dalla Geometria Descrittiva, e dalla ormai non più *modernissima* analisi a tre coordinate (*pag.* XIII. *e* XIV.)

Intorno alle linee curve ed alle superficie curve molte conoscenze ebbero gli antichi a noi non pervenute, come altrove si è detto (Veg. la *not.* (*a*) *al programma*). Essi non potevano ennmerar le curve di ciascun ordine, poichè non avevano la nostra analisi algebrica; e però non potettero certamente intorno alle curve ed alle superficie curve operar tutto quello, che senza di questa non si può ottenere: ma è però certo che dove potevan giugnere co' loro metodi, in considerazioni geometriche, vi pervennero in modo da sorprendere. La perfezione è il carattere che distingue le loro cose. Del rimamente essi valevansi delle curve e delle superficie curve, che considerarono, per la composizione de' loro problemi *lineari* ; e noi non siamo giunti ancora e trarre alcun vantaggio per tale oggetto dalle nostre considerazioni analitiche di questo genere. Rispettiamo dunque que' nostri maestri in ciò che gli appartiene, e contentiamoci di esser noi giunti a superarli estendendo le nostre conoscenze in tal genere, e facilitandole con l' uso de' metodi moderni, che a loro erano ignoti.

Ma queste nuove considerazioni sulle linee curve e le superficie curve non sappiamo però comprendere come le attribuisca il sig. Padula alla sola *analisi a tre coordinate* ; quasi come se già prima, che un tal metodo si riducesse in uso volgare, e si applicasse a' problemi determinati, non se ne ravvisassero vestigia. E non è egli medesimo, che poco prima ci aveva citato il Newton, ed il Cramer, per le linee curve di terzo e quart' ordine, a' quali noi aggiugnevamo l' Eulero : e questi due stessi ed il Clairaut non si eran pure già molto occupati delle superficie curve? Ma tutti costoro nulla hanno però fatto intorno a' luoghi geometrici corrispondenti alle superficie curve; nè tampoco dopo loro una tal materia è stata da alcuno tentata : ed in ciò forse gli antichi ci erano superiori. E sarebbe a proposito, che i moderni si rivolgessero a trattarne co' loro attivissimi metodi; poichè per tal modo si potrebbe forse pervenire a risolvere problemi di grado superiore al quarto.

XXXI. *Applicazione dell'Algebra alla Geometria* — In essa il bisogno di una figura, e le preparazioni geometriche tarpano le ali all' Analisi algebrica, e ne rendono meno celere e più faticoso il volo, e per le costruzioni delle formole ne riescono di poca utilità i risultamenti (*pag.* XL.)

L' eleganza della soluzione non può ottenersi, che mediante quella preparazione geometrica, ch' essi naturalmente disprezzano, perchè non ne conoscono il merito, nè saprebbero eseguirla; e per riguardo alle figure, ben riesce talvolta il risolvere astrattamente pensandovi anche passeggiando un problema senza figura, adoperandovi l' analisi antica, che ove convenga eseguirne la soluzione algebricamente, molto più se con un treno di formole per iscegliere quelle al proposito : e noi non dubitiamo asserir falso, dicendo che molti di que' problemi che appariscon risoluti senza figura, l' hanno avuta nell' atto della soluzione che n' è stata fatta ; come al contrario molti altri di quelli che veggonsi accompagnati da figure, per renderne più facile e piana l' analisi

sono stati astrattamente risoluti, e ciò lo diciamo anche per propria sperienza. Ma se il problema geometrico ha bisogno di costruzione, si eseguirà ancor questa senza figura, cioè senza eseguirla? Che non dubitino i nostri analisti puri contraddittori, che la figura *non tarperà le ali a' loro voli*, se essi non le abbiano però come quelle d'Icaro; ond' è che abbiasi poi ad avverare, ciò che, con verità filosofica, cantava il nostro poeta epico:

Ed a' voli troppo alti, e repentini
Sogliono i precipizj esser vicini.

XXXII. *Cartesio* — Dimostrò che per mezzo di quarte proporzionali tutt' i problemi piani si possono sempre risolvere, o ridurre alla ricerca di due rette che abbiano una data somma o una data differenza, e contengano un dato rettangolo (*pag.* XIX.)

Qui più che erroneamente confondesi la costruzione delle espressioni lineari per le equazioni di primo grado risultanti da' problemi geometrici, per le quali sono necessarie quelle quarte o ancor terze proporzionali, con quella delle altre del secondo, per le quali il Cartesio ne assegna la costruzione in dato modo col cerchio. Ma egli nè meu riconobbe quella riduzione generale di sopra indicata, che altrimenti non avrebbe affermato, errando ancor esso (*), di non aver gli antichi mai avvertita la general costruzione de' problemi del 2° grado (*Veg. la di lui* Geometria *a pag.* 7., a la nota alle *prop.* 28 e 29 dell' Euclide del *Flauti*). Ed è singolare, che i risponditori al programma fossero caduti in sì grosso sbaglio, mentre si erano a sorte imbattuti in quel luogo del Cartesio; e lo avevano riportato

(*) Perchè una tal proposizione non ci sia attribuita ad imperdonabile bestemmia, ci appoggeremo a Gio. Bernoulli, il quale diceva: » M. Des Cartes » n'étoit pas infaillible; et je ne doute pas même que, s'il étoit encore en » vie, il ne rovocât plusieurs choses qu'il a avancées. (*op. t. I. n.* XV.)

nella loro risposta a *pag.* XI. per altro a confermare quello che non dice (*Ved. n.* XI.)

XXXIII. *Cartesio* — Dimostrò che i problemi solidi riducevansi a trisegar l' angolo , o a duplicare il cubo ; al che non potettero mai giungere gli antichi (*pag.* XX.)

Tra le molte cose di cui la Geometria va debitrice all' ingegno sublime del Cartesio una delle principali è sicuramente la costruzione delle equazioni del terzo e quarto grado , combinando un cerchio ad una parabola modulo , di tal che descritta una volta questa , i problemi solidi vengonsi a costruire con la semplice descrizione di un cerchio in convenevol modo con quella combinato . Or egli dopo aver ciò dimostrato , il convalida con due esempj , imprendendo a risolvere i due problemi celebri presso gli antichi , quello delle due medie proporzionali , e l' altro della trisezione dell' angolo , i quali comprendevano i diversi casi delle equazioni per problemi solidi ; che però egli soggiugneva : *Superfluum foret si insisterem hic aliis exemplis in medium afferendis, cum problemata omnia , quae non nisi Solida sunt , eo reduci possint , ut hac regula ad constructianem ipsorum non aliter indigeamus , quam quatenus inservit ad inveniendas duas medias proportionnles , aut ad dividendum angulum in tres aequales partes* . Ed il suo comentatore Schooton nell' argomento al lib.III. così ragiona : *Quibus explicatis , accingit se deinceps ad Solidorum problematum constructionem , postquam reducta sunt ad aequationem trium aut quatuor dimeusionum . : . . . . . . Eaque ita praeparata*, *docet* , *unica regula ope parabolae facile ac expedite posse construi . . . . . : . . Caeterum ut hujus regulae facilitas ac usus in Solidorum problematum constructionibus eniteat , ipsam deinde , in solvendis nobilissimis binis illis , ac celebratis , nec non antiquitus usque adeo agitatis problematis; altero scilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis ; altero autem de dividendo angulo in tres aequales partes adhibet*. E da tutto ciò vedesi nemmeno essere esatto il dire , che avesse

il Cartesio *dimostrato che i problemi solidi riducansi a trisegar l' angolo e duplicare il cubo*. Ma che gli antichi non avessero poi conosciuta questa riduzione pe' problemi solidi, non può dirsi con quella franchezza, che al loro solito costumano i contraddittori al programma; anzi par che il contrario sia comprovato dal grande impegno che quelli posero in risolvere in diversi modi elegantistimi tali problemi; ed al trovar che Pappo ad essi riferiscesi nel parlare della distinzione che fecero gli antichi de' diversi generi di problemi (*dopo la proposiz. 30 lib. IV.*): e ciò prima che forse ravvisassero un' altra maniera di classificarli, mediante la riduzione a' luoghi di due, tre o quattro rette, o ancor più.

xxxiv. *Cartesio* — Per supplire tutte le mancanze dell' antica Geometria, e supplirvi debitamente, doveva profondamente conoscerla; lo stesso pe' coltivatori del metodo Cartesiano; poichè la nuova Geometria moveva da dove l' altra finiva, *ec. ec.* (*pag.* xxiii. *e* xxiv.)

Noi non entriamo scrutinatori a vedere se il Cartesio conoscesse profondamente l' antica Geometria; che ben potremmo ancora, con tutto il rispetto dovuto a sì grand' uomo sospettare ch' egli, fidandosi troppo al suo fervente ingegno, avesse meno attentamente meditato, che non convenivasi, sulle opere degli antichi, ed in ciò asserire appoggiarci all' autorità dell' Ugenio, che fu un degli ammiratori della Geometria del Cartesio; ma che non tralasciò dire, al proposito di un' opinione che costui ebbe: *quem si minus insignem geometram, quam algebristam fuisse arbitraris, parum ex vero judices* (*epist. ad Xav. Op. p.* 547). Non sappiamo però intendere come la Geometria Cartesiana cominciasse ove finiva l' antica, se l' una e l' altra adoperavansi ciascuna al suo modo allo stesso scopo, cioè lo scioglimento de' problemi, e vi riescivano del pari. Tutto il resto delle pag. xxiii. e xxiv. è un discorso, che non solamente non rischiara la proposizio-

ne precedente ; ma ne continua un numero di altre dello stesso tenore , che stimiamo tempo assai perduto il considerarvi sopra .

xxxv. *Costruzioni grafiche* — Da lasciarsi alla sola Geometria descrittiva , ed alle altre scienze di puro disegno , ove non si richiede tanta sottigliezza (*pag*. xl.)

Dove trattasi problema geometrico vi dee assolutamente esser costruzione ; ciò è dell' intrinseca natura di tali problemi , e noto fin dalla loro definizione : nè v' ha geometra o analista che non ne convenga ; e noi qui riporteremo per tutti il seguente canone del Castillon : *In problematis , praecipuus locus est constructionis ; constructio quaeritur , et actu est peragenda* . Inetta è poi del tutto la proposizione di conceder ciò solamente alla Geometria Descrittiva , ove *non si richiede tanta sottigliezza* ; nè saprebbero intendersela, non che spiegarla coloro stessi che l' hanno pronunziata . Le costruzioni di Geometria descrittiva sono diverse delle ordinarie geometriche sol perchè queste sono fatte co' dati proprj , quelle co' loro determinanti , le une effettive , le altre rappresentative.

xxxvi. *Costruzioni eleganti* — Lusingano la vanità umana e sono un mero pregiudizio (*pag*. xli. *not*.)

Per un semplicissimo saggio dello sragionar che si fa in tal nota , abbiamo recata questa sola proposizione contraria al buon senso , ed a' precetti di tutta la scuola antica . Ma se questa pe' rispondítori al programma fu una scuola di stolti , che diranno essi de' moderni , trovando che il Newton pronunzj categoricamente : *In constructionibus quae sunt aeque geometricis , praeferendae semper sunt simpliciores . Haec lex omni exceptione major est*. E più appresso : *Speculationes geometricae tantum habent elegantiae , quantum simplicitatis* (*De aequat. constr. lin.*) . E l' Halley assumeva per principio ecumenico de' geometri , che : *Aliter est problema aliqualiter resolutum dare , quod modis variis plerumque fieri potest , aliter methodo elegantissima idipsum efficere ; Analysi scilicet brevissima , et simul perspi-*

cua , *Synthesi concinna et minime operosa* (Praef. in lib. Apollonii *de Sectione Rationis* , *et Spatii*) . Ed il Castillon continuava il luogo recato nel numero precedente , dicendo : *ideoque ea praeferenda est constructio* , *quae simplicior est et facilior.* Si riscontri ancora il detto del Lhuilier al proposito della soluzione del Giordano pel problema del Cramer , riportato nella nota (*d*) al Programma .

E perchè si vegga essere un tal sentimento tutto proprio de' nostri straordinarj contraddittori , nè credasi che sieno i moderni valenti analisti che così pensino, si potrà riscontrare l'introduzione del Gergonne alla sua soluzione del problema poc' anzi detto (*Ann. des Math.* vol. VII.), ove a' pregi del novello metodo ascriveva l' ottenersi da esso le soluzioni *le più dirette* , *le più eleganti* , *e le più semplici* ; e lo stesso ripetevano egli ed altri suoi colleghi in altri luoghi degli *Annali* stessi .

Ma che dirassi poi , se i medesimi contraddittori , senz' accorgersene la sentano uniformemente al resto de' geometri riguardo alla semplicità ed eleganza della soluzione , come non in altra opera , ma nella stessa *Risposta* dimostrano . Così eglino , dopo la costruzione eseguita a lor modo del problema suddetto , soggiungono » Quantunque la costruzione precedente possa riguardarsi come *elegantissima* » (§. 2. *p.* 7.) » E poi : questa costruzione come *vedesi è alquanto più semplice* della precedente (§.3. *p.* 9.) « E successivamente » Però » le prime due costruzioni non si rendono molto più semplici in » questi casi speciali.... (§. 4. *p.* 11) . « E così pure in altri luoghi della *Risposta* : e nella *prefazione* ad essa avevano pur parlato di *elegantissime costruzioni grafiche* .

A spiegare sì manifesta contraddizione altri ricorrerà a dire , che sia effetto di animo prevenuto , e ravviserà da essa nella *Risposta* pubblicata l' opera di diversi . Ma io vi soggiugnerò dipender ciò principalmente dal trovarsi la mente del principale di loro in contrasto tra la buona istituzione ricevuta un tempo , e quella che vuole per le circostanze affettare , potendosi ben applicargli quello

che dice il nostro epico divino del mago Ismeno, che *confondeva le due leggi a se mal note*. Ed a convalidare tal congettura rimetto i lettori all' *Analisi critica* del mio collega, *pag.* 133, 134, 135.

XXXVII. *Curve Coniche* — Investigarne le proprietà opera perduta (*pag.* LV.).

A buon conto Aristeo, Euclide, Archimede, Apollonio, che scrissero espressamente trattati de' Conici, e quanti altri dell' antica scuola se ne occuparono, non sapevano che fare del loro tempo; e tutt' i moderni, che hanno comentate le opere di quelli hanno fatta *opera perduta*. Il nostro Maurolico, il de la Hire, e l' Hopital che lavorarono molto su questo argomento, ed ancor l' Eulero, per tacere di tanti altri, sonosi invano occupati in ricerche intorno ad esse. E noi senza tanto affaticarci in ammassare autorità di sommi uomini sull' importanza di loro dottrina, ci limiteremo a dir solamente, ad istruzione de' pronunziatori di sì sciocca proposizione, che le proprietà di quelle curve servono a risolvere e comporre i problemi solidi; e ricorderemo, che per la deficienza di alcune di esse, scoperte posteriormente, non giunse Euclide a comporre il luogo *alle tre e quattro rette*, nel che potè poi riescire Apollonio (Vedi *Pappo nella pref. al lib. VII.*).

Inoltre che senza di esse la Geometria Cartesiana mancherebbe de' cardini che ne reggono tutto l' edifizio; ed ora ancor la moderna Geometria analitica della conoscenza delle *polari* per tali curve, e del modo di esibirle, e quindi del principal mezzo di costruzione per la maggior parte de' risultamenti algebrici delle loro analisi. Al che aggiungeremo esser esse le curve della Natura, e però necessarie alle speculazioni della Meccanica in generale. Ma i risponditori al programma sono uomini veramente originali, e le loro proposizioni non paradossi, ma da fare stordire assolutamente per la novità e singolarità loro.

XXXVIII. *Curve Coniche* — Gli scrittori di Geometria analiti-

ca non hanno sviluppato che poche proprietà delle curve coniche, lasciando le altre per esercizio di scuola (*pag*.LVI.).

Leggasi la nota (o) al programma, e la (29) dell' Analisi critica, ov'è riportato un luogo dell' Eulero, che chiude la bocca alla di sopra spropositata proposizione.

XXXIX. *Curve Coniche* — Le istituzioni sintetiche di esse cominciarono ad essere abolite nelle scuole, e vennero sostituite in loro vece quelle di applicazione dell' Algebra alla Geometria sin dal nascimento della Geometria Cartesiana (*nota a pag*. XXXIV.).

È precisamente da quest' epoca in poi, che sonosi vedute comparire quelle del de la Hire, del Borelli, del Grandi, del Krafft, dell'Hutton, del Fergola, del Cagnoli, e di tanti altri di minor fama, ed ancor quelle dell' Hopital, che non hanno se non veste algebrica; mentre prima non si conoscevano che i soli Conici di Apollonio tradotti e comentati, o parafrasati.

XL. *Determinazione* — È veramente bizzarra l' idea che si possa regolarmente proporre un problema affidando a chi voglia risolverlo l' incarico di modificarne l' enunciato, e non ci saremmo incaricati di rintuzzarla, se a convalidare una tale opinione non si fosse citata in appoggio una parte di un passo di Pappo, il qual milita anzi evidentemente in nostro favore (*pag*.LXI.*e* LXII.).

Non accresceremo tedio a' nostri lettori entrando a discorrere di questo assunto, avendone abbastanza e dottamente ragionato l' autore del programma nella nota (*u*) ad esso, e nelle *Esercitazioni su' quesiti del medesimo*, da *pag*. 23 *a* 17, e nella nota aggiunta in fine di queste, ove, a conculcar l' impudente jattanza de' poco esperti rispondditori, gli si spiega quel luogo di Pappo ad essi prima del tutto ignoto, e poi nel riscontrarlo, dietro la citazione dell' autor del programma, non saputo ben leggere, e molto meno interpetrare convenevolmente. Ed alle cose ivi dette soggiugneremo solamente, che

avrebbe dovuto far loro qualche impressione, il vedere che col pezzo da essi imperitamente aggiunto, e nel modo come l'interpetravano, Pappo sarebbesi manifestamente contraddetto. Ma forse eglino di buona fede crederanno che tutti abbiano sempre scritto e scrivano con quella facilità, e senza pensare a ciò che dicono, come fanno essi.

Ed avrebbero pur potuto prendersi qualche pena in riscontrare alcune delle soluzioni di problemi nelle opere rimasteci degli antichi, per avvedersi del loro grosso errore: e gli sarebbe anche bastata la semplice lettura della prefazione di Pappo al lib. VII., ove descrivendo i libri *de Sectione Rationis; de Sectione Spatii; de Sectione Determinata*, enumera le *determinazioni* di cui avevano abbisognato alcuni problemi: dicendo, per un esempio; pel libro I. *de Sectione Rationis: — Habet Loca septem; Casus viginti quatuor, Diorismos* (vale a dire *determinationes*) *vero quinque*, e pel secondo: *Determinationes autem ex primo, ad quam totus refertur*. Ma noi ci asteniamo dall'insistere ulteriormente su di una materia, della quale è più che persuaso chiunque si esercita in risolver problemi, e solo ci permetteremo osservare qualche altra piccola cosa in appresso.

XLI. *Dimostrazione* — Di una costruzione del tutto inconveniente e superflua (*pag.* XXXIII.).

Sebbene per una tal proposizione fosse veramente *inconveniente* e *superfluo* il dimostrarla sciocca, pure a mostrar nostra docilità vi faremo sopra alcuna riflessione. Primieramente osserveremo, che essendo per gli antichi la dimostrazione a dirittura l'analisi inversa del problema, potevano però essi ben risparmiarsela, e pure nol fecero. Ma trattandosi di problema geometrico algebricamente risoluto, la dimostrazione rendesi di assoluta necessità; perchè essa dee seguire l'andamento geometrico della costruzione, per cui gli antichi quella con questa connessero, sotto nome di *composizione*: che altrimenti facendosi da' moderni, non già una dimostrazione si otterrebbe, ma una verifica della soluzione fatta.

E perchè non rimanga ancora senza qualche esempio preso da' moderni ciò che abbiamo fatto quì rilevare; potrà riscontrarsi il *Commentario* dello Schooten al lib. II. della *Geometria del Cartesio*, ove di un problema (che dall' analisi di esso risulta indeterminato, e che non però l' Ugenio credè aver fatto male ad occuparsene) ne soggiugne la dimostrazione geometrica corrispondente (*pag.* 230 *e* 231.) Al qual proposito non vogliamo anche tralasciare di avvertirli, che se non hanno voluto perdere il loro tempo prezioso in leggere gli antichi, e coloro tra' moderni che gli hanno esposti e comentati, non dovevano però usarne similmente verso il Cartesio ed i suoi comentatori, pe' quali ragionevolmente si sono in più luoghi dimostrati rispettosi, ed esser giunti a comprendere che la moderna *Geometria analitica* dalla Cartesiana immediatamente deriva; e però non avrebbero dovuto con un solo tratto di penna dichiarare inetto lavoro il bel trattato dello Schooten *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*.

Del rimanente i risponditori al programma si sono negati a dare la dimostrazione, asserendola come *inconveniente e superflua*, perchè nel caso in quistione, ov' era accortamente ed espressamente dimandata dal proponente il programma, essi non potevano mai farla, non avendovi soddisfatto nel modo diretto come erasi richiesto (*Veg. il n.* II. *dell'* Analisi Critica).

XLII. *Eliminazioni* — I metodi per esse sono perfettissimi (*pag.* LI. *e* LII.).

Per non ripetere le cose dette giudiziosamente dal mio collega nell' *Analisi critica*, leggasi la nota (4) di questa a *pag.* 128.

XLIII. *Equazioni* — Molte ricerche *importanti per la loro teorica* debbono alla Geometria la loro origine ed il loro perfezionamento (*pag.* XXV.).

Questo concetto così espresso dall' autor del programma nè meno è piaciuto a' risponditori ad esso, per la ragione che non mai, nè

men per semplice curiosità , sonosi imbattuti a guardare le ricerche sulle equazioni del terzo grado nelle opere del Tartaglia e del Cardano, nè tampoco di tutti gli altri antichi analisti italiani ; e nè anche gli sono venute alle mani le opere del Vieta . E ciò significa esser conseguenti alla loro singolare maniera di pensare ; poichè la scienza analitica tutta è di freschissima data , e sta ne' libri elementari principalmente di oltremonti . Ma noi non mancheremo in appresso di far loro osservare , che ancora da talun classico libro modernissimo , e fondamentale per la *teorica delle equazioni* si poteva rilevare qualche cosa , per non far loro muover la bile contro la giusta proposizione dell' autor del programma.

XLIV. *Eulero* — Nella sua *Introduzione all' Analisi degl' Infiniti* fece assumere alla Geometria Cartesiana una forma più analitica , ed un andamento più generale (*pag*. XXII.).

Eulero fece da uomo sommo qual era quello che la Geometria Cartesiana doveva operare in tal genere di applicazioni ; e non egli solamente , ma ancora il Cramer , il Clairaut ed altri avevano trattati egregiamente soggetti simili , adoperandovi il metodo geometrico-algebrico convenevolmente ; da che la teorica delle curve aveva ricevuto grandissimo sviluppo ed aumento . E se i risponditori al programma arrivano a ciò riconoscere , per loro buona fortuna ; perchè poi non troveranno a proposito che da noi s' inculcasse di non deviare dal cammino regolare da questi indicatoci ?

XLV. *Fergola* — Ha vissuto in tempi in cui le Matematiche erano quasi nascenti presso noi. . . . .
Egli aveva poco approfondito sul metodo Lagrangiano . . . .
Non aver avuto il tempo di studiare abbastanza un tal metodo , e comprenderne lo spirito , ed il modo di usarlo . . . .
Egli aver però asserito , che *nel trattato de' diametri* (delle curve coniche) *gli analisti vi cominciano a cespicare* , *e nella teo-*

rica delle tangenti e delle seganti si tacciono interamente o vi ridicono lievi cose (*pag.*LIV. *e* LV.).

È sì puerile questa critica, che non esiterò punto ad attribuirne di buona fede tutto il merito al Padula, non potendo mai immaginare, che i suoi maestri, e tra essi il principale, che fu un degli ultimi allievi del Fergola, avesse potuto suggerirgli simili impertinenti sciocchezze, alla quali crederei troppa bassezza ancor mia il discendere a prove in contrario, ed a paralleli de' tempi, rimettendomi al senso comune de' nostri dotti, e degli stranieri (*Vegg. per un di più la nota* (*d*) *al programma*, la Géométrie de position *del Carnot*, il Lhuilier nella Memoria inserita negli Atti di Berlino pel 1796, *il Majocchi nella* Biografia del Brunacci, *la* Rivista generale di Scienze ed Arti, *che cominciossi a stampare in Napoli nel 1825*, *ec. ec.*). Solamente ad istruzione del sig. Padula gli dirò, che per ragionar giusto doveva egli ricordare aver più volte ripetuto, che per le ricerche geometriche con la *sintesi* non vi era, e molto meno vi sia metodo, e che l'analisi Cartesiana non era ancora il vero metodo generale per le risoluzione de' problemi geometrici; nè però aver negato al Fergola un merito distinto nel valersi dell'una e dell'altra. E combinando tutto ciò, con aver anche detto essere il metodo analitico puro derivazione dal Cartesiano, e certamente fatto per facilitare la risoluzione de' problemi, e non per renderla piu difficile, che ben allora potevasene fare a meno; non sappiamo vedere come ne discendesse per conseguenza, che il Fergola *non avesse avuto tempo da studiare abbastanza il moderno metodo analitico*, pel quale ad intender. lo pienamente, e maneggiarlo con facilità, egli giovane com'è, e senza tanto corredo di precedenti cognizioni vi è riescito sì presto. Ed avrebbe dovuto pur riflettere, che se sono veri que' mancamenti che il Fergola avvertiva nelle ordinarie istituzioni sulle curve coniche fin 1814, senza esservisi potuto finora supplire; e se in altri rincontri il Fergola e quelli di sua scuola, che ebber parte alla

compilazione degli *Opuscoli Matematici*, i quali cominciarono a pubblicarsi fin dal 1810, vi notarono la difficoltà che con tal metodo si sarebbe incontrata in risolvere alcuni problemi geometrici, ciò non poteva affatto avvenire, senza aver profondamente considerate la risorse di un tal metodo, che alcuna difficoltà potrà mai presentare a chi del Cartesiano sia istrutto, essendo lo stesso stessissimo liberato apparentemente dagli apparecchi geometrici, che questo aveva comune con l'antico, comprendendoli nelle formole algebriche, che ecumenicamente, e senza alcuna peculiare scelta vi si adoprano nella soluzione de' problemi, per pervenire all'equazione ad essi; d'onde poi la gran difficoltà nel riescire per tutti generalmente in costruirli con eleganza. Ed in comprova di ciò me ne appellerò a' luoghi del discorso del Tucci nelle *Osservazioni sul problema della piramide triangolare riportati nell' Analisi critica* del mio collega; quando egli mostravasi più ragionevole, e ricordar meglio che ora i precetti della buona istituzione ricevuta.

XLVI. *Fergola* — Per le omissioni che crede commesse nelle moderne *Geometrie analitiche*, circa i *raggi d' osculo delle sezioni coniche*, *le loro evolute*, *e altre di coteste importantissime locali*, *e le dimensioni delle curve stesse*, *se non vogliasi ricorrere all' analisi degl' infiniti*, *il che produrrebbe lo sconcio di subordinare il sommo all' imo*: si fa osservare, che il calcolo differenziale ed integrale danno le norme da doversi eseguire in tutt' i casi; ed esser per ciò inutile, e tempo assolutamente perduto lo studiare con particolari vedute quelle cose, che nel proseguimento del Corso matematico, come applicazioni di metodi generali debbonsi poi considerare (*pag.* LVI. *e* LVII.).

Non crediamo nè pur necessario di recare autorità per convalidare, che non debbasi ricorrere ad un metodo superiore per ottener quello che si può, e si deve ricercare con uno inferiore, molto più

se trattisi che l' uno si appartenga all' analisi de' finiti, l' altro a quella degl' infiniti, e poichè ciò è massima inconcussa di tutt' i matematici; e sarebbe maggiore sconcio di quello di risolvere un problema per luoghi di un genere superiore alla sua natura.

Ricorderemo solamente, che in tal modo sarebbe anche mancato all' analisi degl' infiniti quel mezzo di comprovamento da stabilirne i principj, ed a far terminare le quistioni sulla metafisica di essi; donde tanta utilità n' è derivata pel progresso de' metodi algebrici, e delle loro applicazioni. E se l' argomento de' risponditori valesse, non pur le sopraddette ricerche, ma ancor le altre per le tangenti, normali e sunnormali si avrebbero dovuto tralasciare, rimettendole all' analisi degl' infiniti, il che non vediamo dagli accorti scrittori di teorica delle curve coniche con l' analisi pura eseguito, nè da' signori risponditori trovato superfluo. Il ricorrer dunque a quell' espediente, l' è per la impossibilità di riescirvi nel modo proprio e conveniente. E se la massima con tanta facilità posta innanzi dovesse aver luogo, oh quanto anche dell' Aritmetica la più elementare e della prima Geometria dovrebbe tralasciarsi, rimettendolo a' metodi più generali, che l' Algebra, e la Geometria sublime in appresso insegna! E ciò, oltre alla manifesta irregolarità, ridurrebbe l' insegnamento delle Matematiche a cominciare da dove deve finire, distruggendo la principal qualità di esse, ch' è il matodo e l' ordine (*Si riscontri anche il num.* VII.).

XLVII. *Fergola* — Si esaminano alcune sue osservazioni riportate nelle *Sezioni Coniche analitiche* al §. 40, e not. §. 71 (not. a pag. LVIII, LIX e LX.).

Veggasi per questi luoghi, che debbonsi riputare i più sicuri e momentosi per appoggiarvi sopra l' esame critico, che ne hanno fatto i *risponditori*, l' *Analisi critica* del mio collega dalla *pagina* 145 alla 148. Ed è facile rilevare dalle note al programma, e dal presente *indice critico*, come infelicemente sragionino i risponditori in fatti di giudizj su lavori altrui, attribuendo a difetto o anche errori di questi

ciò che nel fatto è mancanza d'istruzione in essi. E son certo, che resi più accorti da' saggi avvertimenti loro fatti, vogliano cambiare lo spirito maligno, e la poco accorta maldicenza su di un'opera di un uomo sommo nella scienza, meditatore, ed avveduto, qual'era il Fergola, in volontà di studiarla attentamente per meglio istruirsi. Che se prevalga in loro a questo saggio consiglio il livore, e s'inducano, che non credo, a propalar nuove sciocchezze, peggiori certamente delle già dette, noi, che per questa prima volta abbiamo creduto buona opera verso essi, e rispettosa ancora verso il pubblico quella di scendere a mostrare i loro errori, non istimiamo ciò necessario per l'avvenire; sì perchè la loro ostinazione ci dimostra essersi tratti tanto fuori la buona strada, da riescirgli impossibile il rimettersi in cammino; sì ancora perchè la gioventù non potrà di vantaggio esser dalle loro sciocche dicerie illusa, stante che ha già in mano più di una dimostrazione di loro imbecillità, per gli errori positivi di scienza diretta su' metodi e sulla natura de' problemi, la quale si acquista non arzigogolando stranamente, dopo la semplice lettura di qualche istituzione di moderna *Geometria analitica*; ma sì bene leggendo e meditando sulle opere classiche di nostra scienza di ogni età, e con ogni metodo compilate. Inoltre perchè a noi sembra, e l'è così pure pel pubblico, tempo assai male impiegato quello di discettare sopra sciocchezze, prendendone ad esempio il saggio consiglio de' matematici di ogni tempo. Finalmente, per non deviarci dall'adempiere a cose di vera importanza e dovere verso il pubblico, e primieramente alla pubblicazione di quanto si è promesso riguardante il programma, sicchè dal fatto risulti pe' contraddittori non solo la loro poca scienza, come si è veduto, ma il poco accorgimento in attaccarlo prima di conoscerne i risultamenti, cosa veramente puerile e da insensati.

XLVIII. *Fergola* — Ha con poca giustizia spesso trovato a ridire sulla moderna Geometria analitica, e l'autore del programma facendosi scudo dell'autorità di lui, non ha mai mancato dal

canto suo di andar ripetendo le asserzioni non sempre esatte, e le massime poco meditate del suo maestro . . . . (*pag.* XXXVII.)

Fergola era un uomo profondo nella scienza e ne' metodi di essa, ed aveva sostenuta per ben mezzo secolo una scuola, che ha formata l' ammirazione al di fuori, ed è stata di grande utilità pel proprio paese, che gli deve quel grado di conoscenze nelle Matematiche, al quale ora si è giunti. Egli non disprezzava, nè contraddiceva ad alcuno de' metodi per l' invenzione in tali scienze, stimandoli buoni tutti, se adoperati con conoscenza e con giudizio : ma gli tornava ad obbligo d' istituire la sua scuola sul valore e qualità di ciascheduno ; e questo non lo eseguiva con parole, ma istituendone parallelo nell' applicarli. Si riscontrino in comprovamento di ciò i diversi luoghi degli *Opuscoli* di sua scuola, delle sue *Sezioni Coniche analitiche*, e de' *Luoghi Geometrici* di esse ov' è occorso parlarne ; ed a quelli specialmente, e come vien dimandato da lui si risponda.

L' autor del programma, come ogni altro educato nella scuola del Fergola, ha seguite le ragionevoli orme del suo maestro, ed il programma solo può servirne di argomento, per non ricorrere ad altre sue cose. Esso è destinato a *promuovere e comparare i metodi*, e non ad abbatterne alcuno, che non è egli sì strano, nè di sì poca mente, come i risponditori ad esso. Nè egli, nè il Fergola sognaron mai la *dichiarata aperta inimicizia* al metodo delle coordinate, notandovi que' difetti, che non già essi soli, ma tutt' i distinti matematici moderni esercitati ne' metodi vi ravvisano ; come malignamente si asserisce nella lunga diceria di questo nojoso luogo della *risposta*, che termina finalmente col palesarci la gran verità, che l' uomo sia un *essere perfettivo*, e col farci sapere, che *Archimede principe degli antichi geometri, era amantissimo de' numeri* ; il che potrebbe far credere a taluno, che si divertisse a cabale da lotto. E si noti pure la precisione con cui parlasi da' *risponditori*, di non averlo detto, come poco esattamente, a loro giudizio, si espresse il Newton,

principe de' geometri; ma sì bene *principe degli antichi geometri* .

XLIX. *Geometria* — Non era una vera scienza presso gli antichi (*pag*. XX.)

A questa proposizione non abbiamo che rispondere .

L. *Geometria* — L' autor del programma erra nel dire, che essa *si mostra pura e senza velame trattata col metodo degli antichi* (*pag*. XXIV.)

Questa proposizione vera ed esatta dell' autor del programma , della quale mai alcuno è stato di sì poco intendimento da disconvenire , essendo dispiaciuta agli autori della *risposta* , gli è stata ben dilucidata nella nota (*b*) alla ristampa di quello : nulladimeno non sarà fuor di proposito trascriver quì il giudizioso ed accurato sentimento del Montucla , del cui consiglio potrebbero i contraddittori valersi utilmente in rettificare la loro strana maniera di giudicare delle cose che assolutamente ignorano . Or questo valentissimo storico delle Matematiche , dopo aver esposto in che consistessero la *Sintesi* , e l' *Analisi geometrica* , così ripiglia a dire » Ce que nous venons de dire montre com» bien peu la Géométrie des anciens étoit connue de ceux , qui ont » mis en question s' il avoient une analyse . Ces géomètres n' avoient » apparemment jamais parcouru *Archimède* , qui l' emploie quelquefois , » encore moins *Pappus* , qui en fait presque toujours usage . Il leur » auroit suffi de jeter les yeux sur la préface du septième livre des » *Collections mathématiques* de ce géomètre , pour dissiper leurs dou» tes sur ce sujet . Car cette méthode y est expliquée avec beaucoup » de soin . Nous avons encore un ouvrage d' *Apollonius* , intitulé : » *de Sectione Rationis* , qui est tout traité analytiquement , et dont » M. *Newton* , juste appréciateur de la Géométrie ancienne , faisoit » grand cas «. Dopo il qual luogo che può anche servire di complemento al *n*.X. del presente *Indice* , egli così ripiglia « A la vue de la clar» té lumineuse qui accompagne le plus souvent cette méthode des an-

» ciens, je ne puis me refuser à quelques reflexions. Il me semble
» qu'il seroit à désirer, qu'elle fût un peu moins négligée des mo-
» dernes, que la facilité extrème de l' analyse algébrique, semble
» jeter de plus en plus dans une extremité viciense. Deja cet abus a
» excité les regrets de plusieurs géomètres du premier ordre, qui se
» sont plaints du tort que faisoit à l' elegance géométrique cette mé-
» thode de reduire tout en calcul. En effet la méthode ancienne a
» certains avantages, que ne peuvent lui refuser tous ceux qui la
» connoissent un peu. Toujours lumineuse, elle répand la clarté en
» même temps qu' elle produit la conviction; au lieu que l' analyse
» algébrique, en couvainquant l'esprit, n' y porte aucune lumiére.
» Dans l'une, on apperçoit distinctement tous les pas qu' on fait,
» aucune des liaisons entre le principe et la derniére des conséquen-
» ces qu' on en tire, n' echappe à l' esprit: dans l' autre tous les
» dégrés intermédiaires sont en quelque façon supprimés, et l' on
» n' est convaincu que par l'enchaînement légitime qu' on sait régner
» dans espèce de mécanisme des opérations qui forment une grande
» partie de la solution (*vol. I. ed. 2. p.166.*) «. Ed a questo ra-
gionamento del Montucla fanno eco tutti i sommi matematici moderni
(*Vegg. anche il luogo del Malfatti riportato dal mio collega a pag.* 129
a 132 *dell'* Analisi critica, e ciò ch'egli stesso dice a *pag.* 144 e 145).

LI. *Geometria pura* — Le ricerche di essa sono d' interesse più che *subordinato* . . . . Sterilissime ricerche . . . . . .
Esse non ispirano più quell' interesse che per lo innanzi le si attribuiva (*pag.* XLIV. XLV. *e* XLVI.).

Dunque d' interesse più che *subordinato e sterilissimo* è stata tutta la scienza geometrica de' Greci; e pure i sommi uomini che coltivarono tali scienze hanno destata l' ammirazione di ben più di venti secoli; e tra' moderni souosi pur trovati degl'insensati al segno di logorarsi il cervello in ricercare, tradurre e comentare le loro opere. Che più, tutti costoro, e tra essi il Vieta, il Cartesio, il

Fermat, il Newton, il Leibnitz, l'Ugenio, i Bernoulli, l'Eulero, e quanti altri vi sono stati, e vi sono che han nome di matematici, hanno perduto tutto o gran parte del loro tempo in ricerche sterili; poichè non v'ha alcuno di costoro, che in risolver problemi geometrici, o in trattar materia di Geometria pura non siesi grandemente adoperato. Certamente, che nessuno attribuirebbe sano intelletto a chi osasse profferire simili sciocchezze: e pure esse sono scritte e pubblicate ne' nostri disgraziati tempi, da persone che si tengono al rango di professori; e non manca chi vi applaudisca: ma costoro ne intendono ancor meno de' risponditori al programma, o approvano anche quello che non conoscono affatto: poichè bisogna pur confessare, che non v' ha alcun nostro concittadino di buon senso, o versato anche mediocramente nelle Matematiche, che non rimanga stordito e dolente della sciocca ed impertinente *risposta* pubblicata.

Le ricerche geometriche hanno doppio scopo, l' uno astratto e più nobile, qual' è quello di perfezionare il nostro intendimento, e nell' invenzione, che ad esse solamente e drittamente si appartiene; ed a questo riguardo fu la Geometria grandemente coltivata nelle scuole de' greci maestri: ed il Viviani spiritosamente la diceva la *restituita Dialettica universale*: l' altro di preparar l'animo agli usi, ed alle moltiplici applicazioni di esse; di tal che non v' ha problema di Geometria di cui possa sì francamente pronunziarsi la sterilità, ed il poco interesse, potendo ben esso risultar necessario all' occorrenza. Ed allorchè le greche scuole trattavano con tanto impegno le ricerche sulle curve coniche, non pensavan mai, che ogni ramo della Meccanica generalmente considerata ne avesse bisogno, e dovesse dalle medesime trarre grandissimo profitto; e pure così avvenne dopo il lungo giro di venti secoli: e Newton non avrebbe stabilito il sistema della gravitazione universale, e fissata la vera Fisica e la vera Astronomia, se Apollonio non gli avesse tramandati i *Conici*. Ma a noi sembra al contrario di *assai poco interesse*, ed *inettissima* la presente discettazione; e però crediamo di averne anche soverchiamente detto.

LII. *Geometria Descrittiva* — Questa scienza può d'rsi che abbia quasi ridotto la Geometria a metodo (*), ed empito l'immenso vuoto lasciato dalla Geometria antica relativamente alla risoluzione de' problemi intorno a soggetti geometrici collocati nello spazio, nel che consiste la vera utilità delle ricerche puramente geometriche (*pag.* XIII.).

La Geometria Descrittiva, per chi la sa conoscere, è un piccol ramo della Geometria in generale, il quale non ha che pochi principj a se proprj, ricevendo tutt' il resto da questa, che in grazia delle arti del diseguo gli permette l' allontanarsi dalla maniera rigorosa di costruzioni che gli sarebbero proprie. E que' principj di Geometria Descrittiva, sebbene cominciati a ridurre in forma dottrinale ed elementare da circa un mezzo secolo, l'erano però ancor prima conosciuti e praticati; senza di che le arti del disegno avrebber mancato della loro rappresentazione. Essi sono poi di tanta facilità, che bastò pubblicarli nella forma poc'anzi detta, perchè chiunque era versato nelle cose di Geometria pura vi s' istrnisse: ed il nostro professor Flauti appena veduti gli Elementi di *Geometria Descrittiva* del Monge, se ne rese assai pratico, da poter dar fuori i suoi, ad istrnzione degl' Italiani; e posteriormente gli arricchì ed estese di molto, e gli diede la forma convenevole ad un ramo di scienza geometrica, nella sua *Geometria di Sito sul piano e nello spazio*; nella quale non mancò, nella prefazione, ed in più luoghi dell' opera, di far conoscere, che molte delle dottrine moderne di Geometria di sito avevano dovuto esser trattate dagli antichi, ed a noi non eran pervenute. Non sappiamo però vedere qual fosse quest' *immenso vuoto*, ch' è nella mente de' soli rispouditori al programma.

LIII. *Geometria* — Fu elevata dall' Algebra al grado di scienza metodica (*pag.* XXV e XXVI.).

(*) *Geometria ridotta a metodo* è proposizione vuota di senso.

Poc' anzi era la Geometria descrittiva, che aveva *quasi ridotta la Geometria a metodo*; ed ora è l' Algebra che l' ha *elevata al grado di scienza metodica*; di tal che non si saprà più a chi di esse debba la Geometria esser riconoscente di tanto benefizio. E soggiugnendoci subito i contraddittori, che » l' Algebra non è propriamente una » scienza in particolare, ma si compenetra e si confonde con tutte le » scienze, che costituiscono le Matematiche « diverrà essa il vero NEMO, che *dat quod non habet*. Il sicuro si è, che tutto il lungo discorso espresso nelle due sopra indicate pagine non dimostra in chi lo fa alcuna conoscenza della Geometria, e dell' Algebra. Nè vale la pena d' impiegarvi tempo a rispondere ragionando, o di addurre autorità di sommi uomini a provarne l' inettezza (*Vegg. per un dippiù il luogo del* Castillon *riportato al n.* II.)

LIV. *Geometria* — Tutti gli equivoci dell' autore del programma nascono da questo, ch' egli considera la Geometria come scienza sempre distinta dall' Analisi (*pag.* XXVI.)

Non è l' autor del programma, che la considera così; ma sono tutt' i matematici antichi e moderni; nè potrebbero riguardarla al modo de' *risponditori*, senza dimostrare di non conoscere l' una e l' altra, e ne rimarrebbero smentiti da che per più di 20 secoli l' una ha progredito senza dell' altra. E recheremo anche in comprova un luogo del Newton: *Qui constructiones problematum per rectam et circulum a primis geometris adinventas considerabit, facile sentiet Geometriam excogitatam esse, ut expedito linearum ductu effugeremus computandi taedium.* PROINDE HAE DUAE SCIENTIAE CONFUNDI NON DEBENT.

LV. *Geometria antica* — Passo misurato sì, ma senza guida (*pag.* XXVII.)

L' autor del programma aveva detto, che l' antica Geometria procedeva con *quel passo misurato ch' era proprio del metodo che adoperava*, e per buona fortuna i *risponditori* gliel mandan buono; ma a scan-

so di concedergli troppo soggiungono subito , *ma senza guida* . Adunque gli dimanderemo da che mai veniva regolato quel passo .

LVI. *Geometria Cartesiana* — Quelli che dopo essa si mantennero più fedeli alla Geometria antica non ebbero parte alle grandi scoperte . I discepoli del Galileo , per non aver coltivato con impegno la nuova Geometria non parteciparono all' invenzione del calcolo differenziale ed integrale . . . .
(*pag.* XXVI *e* XXXI.).

Coltivatori della Geometria antica , e grandi apprezzatori della medesima furono il Newton , il Leibnitz , l' Ugenio , i Bernoulli , il Cotes , il Taylor , il Moivre, e tanti altri sommi matematici della fine del secolo XVII. , e principj del XVIII , e nulladimeno fondarono i nuovi metodi algebrici , accoppiando convenevolmente la conoscenza del nuovo metodo alla Geometria . E per riguardo alla scuola del Galilei, nessun italiano sarà mai di tanto cuore, da togliere a capriccio al Cavalieri la prima spinta data all' Analisi infinitesimale , che gli scrittori di altre nazioni non hanno saputo negargli. E ricordiamo ciò che diceva il nostro professor Flauti su tal proposito , che le scoperte in Matematica sono figlie di una genesi regolare , e non si fanno a salti , e quella dell' Analisi infinitesimale ebbe bisogno da Archimede al Newton ed al Leibnitz per potersi ottenere .

LVII. *Geometria Cartesiana* — Chi ora asserisse che con essa non possono tutt' i problemi costruirsi, deporrebbe contro il fatto , e negherebbe una verità conosciuta (*pag.* XX.).

Chi ciò asserisse contro la possibilità avrebbe sicuramente torto : ma chi dice che *deporrebbe contro il fatto* mostra molta poca conoscenza nelle cose geometriche , e pochissimo esercizio in esse: e noi senza dipartirci dal Cartesio stesso, gli presenteremo ciò ch' egli diceva alla regina Elisabetta , per un certo modo di risolvere il problema de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto , che non si sarebbe fidato

di ridur l'equazione per esso a forma costruibile in tre mesi; del qual esempio si vale anche il Montucla in continuazione del luogo sopra riportato nel *n.* L, ove soggiugne: » Il est d' ailleurs un assez grand nombre » de problêmes où le calcul algèbrique ne s' applique pas facilement; « il en est d' autres, où les expressions algèbriques qui en résul» tent, sont d' une telle composition, que l' analyste le plus intrépi» de en est déconcerté «. E simili casi, che fanno talvolta abbandonare la soluzione di un problema con l' analisi Cartesiana non sono rari: nè v' ha alcuno, il quale si eserciti nella risoluzione algebrica de' problemi geometrici, che non vi sia incorso, fuorchè i contraddittori al programma, fortunati anche in questo. Del resto per vedere con quanta poca riflessione essi avventurino le loro proposizioni, si confronti la qui sopra detta con l' altra, che la distrugge a *pag.* XXX, e ch' è stata riportata nella *not.* 28 all' *Analisi critica*.

LVIII. *Geometria Cartesiana* — Necessaria conseguenza dell'antica e dell' Algebra, quando si confrontò l' una con altra (*pag.* XXXII).

E pure per questa *necessaria conseguenza*, e per questo *confronto dell' una con l' altra* vi è stato bisogno di ben quattro secoli.

LIX. *Geometria Lagrangiana* — Non è nel fondo che la Cartesiana posta sotto le forme convenienti al progresso de' lumi (*pag.* XXXII.).

I risponditori al programma con molto avvedimento l' hanno però denominata *Cartesiano-Lagrangiana*, e noi gli suggeriremo di aggiugnervi — *Mongiana*, *Lacroajana* (*Ved. not.* 15 all' *Analisi critica*): e convenghiamo con essi della prima parte di loro proposizione; ma ci confessiamo assolutamente incapaci a comprendere cosa debba intendersi per *forme convenienti al progresso de' lumi*.

LX. *Geometria Lagrangiana* — A paro con la greca in fatto di semplicità, quante volte si vuol discendere alle costruzioni grafiche (*pag.* XXX.).

Ed ora i greci avevano metodi che conducevano a risultamenti semplici, e non era quindi il *caso* che operava, e la *ventura*: e la Geometria Lagrangiana contro ogni *civiltà moderna*, ed opponendosi talvolta al *progresso de' lumi*, si abbassa a costruzioni, quando può ottenerle. Ed è pur troppo vero, che i coltivatori accorti di un tal metodo, che non mancano della precedente istruzione sulla natura de' geometrici problemi, non le tralasciano, che quando non possono ottenerle.

LXI. *Grandezze* — Hanno tutte la proprietà di esser riducibili a numero, circostanza che finalmente ha fatto bastare un solo metodo a tutto (*pag.* XXVI.)

Uno avulso non deficit alter. La presente erronea proposizione distrugge ad un tratto tutte le grandezze asimmetriche; e riduce la Geometria astratta ad un' arte da fabbro, sentimento nobilissimo manifestato da' contraddittori uniformemente, e con grandissima persuasione e compiacenza in più luoghi della loro *risposta*. Ma a parte di ciò la Geometria è scienza di costruzioni e non di valori; e con tutta la voluta riduzione delle grandezze a numeri, e con tutte le scale di proporzioni non si eleverà mai una perpendicolare, nè si tirerà mai una parallela. E per conferma, ecco in qual modo si esprime il sommo Newton: *Aequationum speculationi nimium indulgent hodierni geometrae. Horum simplicitas est considerationis analyticae. Nos in compositione versamur; et compositioni leges dandae non sunt ex analysi. Manuducit analysis ad compositionem: sed compositio non prius vere conficitur quam liberatur ab omni analysi. Insit compositioni vel minimum analyseos, et compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est et a mixtura speculationum analyticarum abhorret* (*De aequat. const. lin.* §. LI.).

LXII. *Infinitesimi* — La loro scienza imita la Natura, che nelle sue azioni procede per gradi insensibili (*pag.* XL.)

In verità nessuno ancora aveva pensato a questo bellissimo argo-

mento , per istabilir su buone basi la scienza degl' infinitesimi , la quale non ammetterà più da ogg' innanzi alcuna difficoltà ne' suoi principj fondamentali.

LXIII. *Lacroix* — Considerando che le Meccaniche *analitica*, *e celeste* , e la *Teoria delle funzioni analitiche* erano interamente fondate sulla nuova Geometria (*pag*. XXXIII.)

Colui che scrisse queste parole non dovè mai vedere la *Teoria delle funzioni analitiche* dell' illustre Lagrange , che ben vi avrebbe osservato , che per istabilirla non ebbe ricorso che a' soli principj della moderna Analisi algebrica , senza improntarne dalla Geometria nè *vecchia* , nè *nuova*. E si osservi ancora , che in altro luogo i risponditori dicono , che *la scienza del calcolo per opera del Lagrange si era impadronita interamente della Geometria* (*pag*.XXXII) ; il che è manifestamente contraddittorio con la loro proposizione sopra enunciata.

LXIV. *Lacroix* — Fece vedere come potea servirsi della novella maniera di trattare le quistioni geometriche con l' Algebra , per la genesi analitica delle linee del second' ordine (*pag*. XXXIII. *e* XXXIV.)

La rappresentazione di una curva conica dall' equazione non è *genesi* , e le voci combinate di *genesi analitica* sono vuote di senso. Ma se i risponditori non istudiassero su' soli libri elementari , avrebbero ben conosciuto, che questa *genesi analitica* secondo loro era stata già opera dell' Eulero e del Cramer , da cui il Lacroix variava solamente nella forma , e non nell' essenza , che costituisce la diversità reale in questo genere di ricerche .

LXV. *Lagrange* — A' suoi tempi la teorica delle equazioni è divenuta perfettissima (*pag*. XXX.).

Che siasi molto perfezionata l' è vero ; *divenuta perfettissima* , cioè da non rimanervi ancora assai , non perchè soddisfacesse ad astratte considerazioni , come per molte ricerche di analisi moderne avviene,

ma a' precisi bisogni di questa, non vi sarà alcuno mezzanamente istituito che nol conosca, e ne sia ad ogni passo convinto dal fatto. E per non istar a ridire le cose egregiamente espresse sul proposito da questo stesso sommo analista, ecco com' ei ragiona nell' introduzione al suo egregio trattato: *de la résolution des équations numériques* (ediz. del 1808) opera, che avrebbero dovuto conoscere e studiare i risponditori, prima di avventurar proposizioni a caso: » On n' a » pu jousqu' à présent trouver ces fonctions (cioè quelle de' coefficienti di un' equazione, che ne rappresentino tutte le radici) » que » pour les équations du second, du troisième, et da quatrième degré; » mais quoique ces fonctions expriment généralement toutes les ra» cines des équations de ces mêmes degrés, elles se présentent néammoins » dès le troisieme degré, sous une forme telle qu' il est impossible » d' en tirer les valeurs numériques des racines, par la simple substitu» tion de celles des coefficiens, dans les cas mêmes où toutes les ra» cines sont essentiellement réelles; c' est cette difficulté que les a» nalystes désignent par le nom de cas irréductible; elle aurait lieu à » plus forte raison dans les équations des degrés supérieurs, s' il était » possible de les resoudre par des formules générales.

» Heureusement on a trouvè le moyen de la vaincre dans le troisie» me et le quatrieme degrè, par la considération de la trisection des » angles, et par le secours des tables trigonométriques (ecco un de' casi in cui la Geometria è venuta al soccorso dell' Algebra, de' quali accennava l' autore del programma, che i risponditori gli hanno inettamente contraddetto, e di cui ho accennato nel *num.* XLIII); » mais ce moyen qui dépend de la division des angles, n' est ap» plicable dans les degrés plus élevés qu' a une classe d' équations tres» limitée; et on peut assurer d' avance, que quand même on par» viendroit à resoudre généralement le cinquieme degré et les suivans, » on n' aurait par la que des formules algébriques, précieuses en » elles-mêmes, mais tres-peu utiles pour la résolution effective, et

» numérique des équations des mêmes degrés, et qui, par conséquent,
» ne dispenseraient pas d'avoir recours aux méthodes arithmétiques
» qui sont l'objet de ce Traité «. E perchè non si creda, che altri abbia contemporaneamente al Lagrange eseguito quello, che in tale argomento costui non aveva potuto fare, toglie egli medesimo ogni dubbio, così conchiudendo la sua *Introduzione*. » Depuis la premiere édi-
» tion de cet Ouvrage (1798), il a paru différentes méthodes pour
» la résolution des équations numériques; mais la solution rigoureuse
» du probléme dont il s'agit, est resté au même point, où je l'avais
» portée; et jusqu'ici on n'a rien trouvé qui puisse dispenser dans
» tous les cas de la recherche d'une limite moindre que la plus petite
» différence entre les racines, ou qui soit préférable aux moyens don-
» nés dans la Note IV, pour faciliter cette recherche «. Se questo stato dell'analisi moderna per la teorica delle equazioni possa dirsi *perfettissimo*, lo lascio alla considerazione di chiunque ha criterio, e non è avvezzo a parlare a caso. E dirò solamente, che anche dopo il Lagrange nulla siesi finora aggiunto a quello, che da esso erasi operato.

LXVI. *Lagrange* — Dopo aver appoggiato il calcolo differenziale su basi incontrastabili, col suo metodo delle funzioni derivate; dopo aver dato nel calcolo delle Variazioni il metodo diretto per risolvere i problemi di massimi e minimi d'ordine superiore a' massimi e minimi ordinarj considerati nel calcolo differenziale . . . . diede l'ultima mano alla scienza del calcolo, col farlo impadronire interamente della Geometria, e col fargli acquistare il metodo generale per la risoluzione delle equazioni numeriche di grado qualunque, ed in tal modo preparò la strada alla grand'opera della *Meccanica* analitica (*pag.* XXXII.)

Lagrange si sforzò dare un'origine puramente algebrica all'analisi degl'infiniti, con la sua teorica *delle funzioni derivate*; ma non pervenne però a renderla del tutto esente da difficoltà: del che non è qui il luogo proprio a trattare; bastando notar solo, ch'egli mede-

simo si attenne agl' infinitamente piccoli nella sua Meccanica. Di fatti, nell' avviso che pose innanzi all' ediz. 2. di questa, così esprimesi : » On » a conservé la notation ordinaire du Calcul différentiel, parsque elle » repond au systeme des infiniment petits, adopté dans ce Traité. Lors- » qu' on a bien conçu l' esprit de ce systeme, et qu' on c' est convaincu » de l' exactitude de ces résultats par la méthode géométrique des premié- » res et dernières raisons, ou par la méthode analytique des fonctions » dérivées, on peut employer les infiniment petits comme un instrument » sûr et commode pour abréger et simplifier les démonstrations « .

Il *calcolo delle Variazioni* non è il *metodo diretto per risolvere i problemi di massimi e minimi di ordine superiore a quelli che trattansi nel calcolo differenziale*; ma un genere diverso di ricerche di massimi e minimi : ed il confonderli tra loro manifesta imperizia ne' metodi moderni, anche superficialmente, ed istoricamente conoscendoli.

Per ciò che riguarda le equazioni numeriche, riscontrisi il num. prec.

Finalmente ad accorgersi come sempre a caso la discorrano i contraddittori al progamma, avvertasi, che la grand' opera della *Meccanica analitica* era perfezionata, e resa pubblica fin dal 1788, ed egli produceva la sua *Théorie des fonctions analytiques* circa dieci anni dopo, e successivamente il *Traité de la Resolution des équations numériques*, che perfezionava, e riproduceva dopo un altro decennio.

LXVII. *Lagrange* — Si propone di liberare l' Analisi algebrica applicata alla Geometria, ed alla Meccanica dalle figure, e dalle costruzioni, e si pretende che costruisca! (*pag.* XLVI.)

Il voler fare a meno della figura nella risoluzione di un problema geometrico non porta per conseguenza, che possasi far a meno della costruzione, che gli è essenziale : è questa una tal cosa sì nota anche a' principianti, che infastidisce il doverla tante e tante volte ripetere.

La Meccanica non va a paro con la Geometria, ed è una leggerezza de' *rispondítori* di associarvela sempre.

LXVIII. *Lagrange* — La soluzione ch' esso ha data del problema

del Cramer , ove si riguardi come una soluzione analitica , deesi come adequata considerare (*pag.* 13.)

Il problema è geometrico, e però vi è necessaria assolutamente la costruzione ; e ciò voleva lo stesso Lagrange, il quale , come si è veduto nel *num.* IV. , giunto all' equazione , che osservava del secondo grado , se ne rimetteva all' ordinaria costruzione, credendola di facile esecuzione. Si riscontri poi il programma al *n.* I. e le *Considerazioni* ad esso nella part. II. Ma a sempre più confermare il grosso errore, e la poca scienza geometrica analitica de' *risponditori* , soggiugneremo qui la seguente dottrina dell' immortal Newton : *Aequationes sunt expressiones computi arithmetici, et in Geometria locum proprie non habent, nisi quatenus quantitates vere geometricae (id est lineae , superficies , solida , et proportiones) aliquae aliis aequales earum enunciantur. Multiplicationes, divisiones et ejusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt , idque inconsulto , et contra primum institutum scientiae hujus . Nam qui constructiones problematum per rectam et circulum a primis geometris adinventas considerabit , facile sentiet Geometriam excogitatam esse , ut expedito linearum ductu effugeremus computandi taedium . Proinde hae duae scientiae confundi non debent . Veteres tam sedulo distinguebant eas ad invicem , ut in Geometriam terminos arithmeticos nunquam introduxeriat . Et recentes utramque confundendo amiserunt simplicitatem , in qua Geometriae elegantia omnis consistit.* (*De aequat const. lineari* §. III.) . Ed all' autorità del Newton aggiugneremo ancora la valevolissima per loro del Gergonne , il quale essendo dopo tanto lavoro pervenuto, pel problema del Malfatti, ad un risultamento incostruibile , si limitò a presentarlo come un valore aritmetico , nè disse di aver risoluto geometricamente il problema ; e fu contentissimo quando gli venne accennata la costruzione del Malfatti , alla quale fece tutti gli sforzi per vedere se potesse ridursi l'espressione algebrica da lui rinvenuta . Ed altrove tanto dimostravasi impegnato a far vedere costruibili i risultamenti delle sue algebriche

soluzioni, e le costruzioni connesse e derivanti dall' Analisi (Vegg. gli *Annales des Mathématiques*, e le *Considerazioni*).

Ma almeno i nostri risponditori si avessero presa la pena di svolgere quell'equazione dal Lagrange ottenuta, e mostrarci aritmeticamente le radici di essa definite dalle quantità note del problema da lui assunte.

LXIX. *Lagrange* — I. La sua Memoria sulle piramidi triangolari non ha affatto per oggetto la risoluzione di particolari geometrici problemi.

II. Il problema di determinare la distanza de' vertici di due piramidi triangolari poste sopra una comune base, dati i nove lati del risultante solido, non può certamente considerarsi come un problema di pura Geometria.

III. Di tutte le quistioni propostesi dal Lagrange nella sua Memoria, quella di determinare la piramide massima con le quattro facce date è il solo che possa considerarsi come un problema di Geometria.

IV. Al Lagrange ispiravano poco interesse le quistioni di pura Geometria.

V. Egli ha avuto solamente in mira di sottoporre al calcolo numerico le quistioni relative a soggetti geometrici.

VI. Osservazioni critiche sulla Memoria del prof. Flauti riguardante la piramide triangolare inserita negli Atti della R. A. delle Scienze — (*pag.* XLVII. *a* L.).

Per non essere infinito, e ripeter sempre, come fanno i *risponditori*, le cose stesse, ho raccolte in un solo articolo tutte le cose riguardanti la piramide triangolare, rimandando il lettore per qualche dilucidazione, se ne avrà bisogno, alla dotta Memoria del Flauti, ed al ragionamento del mio collega intorno a tal soggetto nell' *Analisi critica*. Solamente sarei stato desideroso di conoscere d'onde mai i *risponditori*

avessero raccolto ciò che francamente, investendosi essi del carattere dell' illustre Lagrange, gl' imputano ne' numeri segnati qui innanzi IV. e V.

LXX. *Lagrange* — Ha reso l'Algebra indipendente dalla Geometria, anche quando ad essa si applicava (*pag.* XXIX.)

È questa un' altra fantasia de' contraddittori al programma, sì strana come di pretendere che un artefice esegua un lavoro senza materia, ma con la sola sua arte e gli stromenti del mestiero. E coloro che hanno annunziata quella proposizione dimostrano sì poco intendimento da non riconoscere, che nelle formole algebriche, le quali si adoprano col metodo *non più modernissimo*, che ad essi piace dirlo *Lagrangiano*, contengono elementi geometrici, che rendono però l' Algebra dipendente dalla Geometria, qualora a questa si applichi; e quelli debbono poi ricomparire nella costruzione, lavoro tutto geometrico ed indispensabile in tali problemi.

LXXI. *Luogo risoluto* — Non consisteva in altro, che nella Collezione de' libri ov' erano scritti tutt' i teoremi dimostrati, e tutt' i problemi risoluti fino a quell' epoca (*pag.* X.)

Per buona fortuna cosa fosse un tal *Luogo* non deve andarsi indagando, avendocelo Pappo dichiarato nel seguente modo, che porremo sotto gli occhi de' franchi *antiprogrammisti* tradotto in nostra lingua, perchè più facilmente possano farne confronto con quello ch' essi al loro solito hanno sognato.

» Il Luogo intitolato di Risoluzione, *Ermodoro* figlinol mio, per » dirtelo in breve, è una certa materia particolare, designata ad uso » di coloro, che, appresi gli Elementi comuni, desiderano procca» rarsi facoltà d'investigare in Geometria le soluzioni de' problemi che » gli si propongono, e per tal fine è solamente utile. Vien egli poi e» sposto da tre geometri, cioè da *Euclide*, scrittore degli Elementi, » *Apollonio Pergeo*, ed *Aristeo* seniore. Procede esso per modo di » Risoluzione e di Composizione. La Risoluzione è il metodo, col

» quale dal quesito quasi come se fosse già ottenuto , per le cose
» che da ciò si deducono per conseguenza , perveniamo ad una qual-
» che conchiusione , col mezzo della quale si esegua la Composizio-
» ne . Imperocchè supponendo nella risoluzione già fatto quello che
» cercasi , indaghiamo da qual cosa precedente ciò derivi per conse-
» guenza ; e di nuovo qual sia l' antecedente di quella tal cosa ; e
» così man mano , finchè ritornando indietro in tal modo , pervenis-
» simo in qualche cosa già nota , e tenuta come principio . E questo
» procedimento si chiama *Analisi* , quasi dicasi , soluzione inversa . Al
» contrario poi nella Composizione , premettendo come già fatta quel-
» la cosa cognita , che ottenemmo in ultimo luogo nella Risoluzione ;
» e quelle che in questa erano conseguenze , disponendole quì come
» antecedenti , con ordine naturale , e tra loro paragonandole, final-
» mente perveniamo alla Costruzione della cosa cercata . Questo poi
» lo chiamiamo *Sintesi* » .

Dopo ciò passa Pappo a distinguere , e dichiarare i due generi di Analisi ; e poi ad enumerare i libri che costituivano un tal Luogo , ed in seguito a darne distinta notizia , dalla quale ognun rileva , che la maggior parte erano libri di precetti e di mezzi per eseguir l'analisi , che costituivano quel metodo per essa , che i ragionevoli contraddittori sì apertamente gli negano , perchè mai lo avevano nè meno istoricamente conosciuto . E solamente vi erano pochi libri destinati come modelli ed esempj per l' applicazione esatta e definita di que' precetti , tal che i due *de Sectione Rationis*, composti di due problemi ; i due *de Sectione Spatii* , ancor essi risultanti da due problemi ; i due *de Sectione Determinata* , che non erano che un solo problema distinto ne' suoi diversi casi ; i due *de Tactionibus* , composti com' è notissimo di dieci problemi costituentine un solo generale enunziato da Pappo ; similmente i due *de Inclinationibus* , che comprendevano la soluzione di un solo problema distinto ancor esso in diversi casi .

Non era dunque il *Luogo Risoluto* una selva di *tutt'i problemi sciolti da tutt' i geometri antichi*, *e di tutt' i teoremi da essi dimostrati*, come hanno sognato i *risponditori*, senza darsi ne men la pena di riscontrare la prefazione al lib. VII. di Pappo: e però sono compatibili pe' tanti errori propalati circa l' Analisi degli antichi, di cui essi nulla avendo mai veduto, nè sapendo pur ove dirigersi a riconoscerla, han trovato il loro comodo a negarla assolutamente, come quell' idiota, che non essendo mai escito dal suo paese, giudicasse restringersi a quello tutta la Terra. E sarebbero stati compatibili pel loro errore, se non avessero avuto l' audacia di rivolger la loro ignoranza contro quelli ch' erano loro maestri, e che non parlano a caso; e senza alcuna ragione offendendoli.

A tutte le precedenti cose aggiugneremo, che rilevandosi dalla descrizione di Pappo, di sopra recata, che al *Luogo di Risoluzione* concorrevano solamente *Aristeo*, *Euclide*, ed *Apollonio* ciò solo bastava a mostrar loro l' errore di aver detto, che in quel luogo erano registrati *tutt' i teoremi dimostrati fin allora*, *e tutt' i problemi fino a quell' epoca risoluti*; poichè non costituivan que' tre tutta la numerosa schiera de' geometri dell' antichità, da Pitagora fino a Pappo: e tra questi se pur altri non erano giunti a loro notizia, ben vedevano non èsservi compreso *Archimede*, che primeggiò nelle sue opere in problemi nuovi risoluti da lui, ed in nuovi teoremi. Ma a noi non duole di altro, che della nostra condizione presente di dover ripetere cose notissime a tutt'i geometri; per dichiararle solamente a pochi tra noi, che vogliono ignorarle, e che educano negli errori la gioventù ad essi disgraziatamente affidata.

LXXII. *Matematiche* — Non sono del numero di quelle scienze; le quali ad altro non valgono che a pascere la curiosità, e la vanità de' filosofi (*pag.* XXXVIII.).

Da questa proposizione, e dal contesto di essa rilevasi, che i *contraddittori* tengono come *curiosi*, e *vani* tutt' i coltivatori della Geometria per se stessa, e non nelle applicazioni ad usi. A buon conto, per loro, tutta la scuola greca è stata una gabbia di stolti, e tali tutt' i geometri moderni fi-

no al Galilei; e semi-stolti tutt' i matematici del secolo XVIII, ed ancora del corrente, che o coltivino le sole Matematiche pure, o parte di loro meditazioni le rivolgano a queste. È stato veramente un gran sacrifizio quello de' risponditori al programma, di aversi ancor per poco meritata essi questa taccia. Ma perchè rispondere a cose che non apprezzavano, nè conoscevano? Potevan loro risparmiare il trattar cose superflue, ed a noi l' occupazione veramente ingrata di far rilevare a' giovani, che essi trattavano materia che gli era affatto ignota.

LXXIII. *Matematica* — Nell' attuale stato ha bisogno di metodi generali appropriati alle diverse sue parti: questi metodi sono appunto la *Geometria analitica* e l' *Algebra*, cioè la sola *Analisi algebrica*, giacchè ora la forma de' problemi geometrici è resa interamente algebrica (*pag.* XXXI.)

La *Geometria analitica*, e l' *Algebra* non sono metodi, ma due rami delle Matematiche: e la *forma de' problemi geometrici resa ora interamente algebrica* è un discorso vuoto di senso; e mostra che coloro che il profferiscono non sanno cosa sono le formole di Geometria analitica che maneggiano, e l' uso cui debbono mirare. Un problema geometrico può esser trattato con l'Analisi algebrica, sia questa Cartesiana, o modificata nel modo puro algebrico, e ciò finchè giungasi all' equazione per esso; donde comincerà sempre ad impossessarsene la Geometria, senza la quale non v' ha mezzo di costruzione che in parole; che però l' Analisi algebrica ha sempre bisogno di non iscompagnarsi dalla Geometria: poichè, come abbiamo già accennato, tutte le sue forze non giungono a poter dividere una retta nè meno per metà, a tirare una perpendicolare, o una parallela, a stabilir la teorica de' triangoli simili, e ad altri problemi elementarissimi; e quindi l' *Analisi algebrica* non ha mezzi proprj da costituir le basi della risoluzione de' problemi, nè vale da se sola a comporli.

LXXIV. *Matematiche* — Ridotte a quell' unità di principj tanto ricercata in tutto da' filosofi (*pag.* XXXI.)

Chi sono questi filosofi matematici, che hanno cercato quello che avevano? Essi hanno sempre dimandato, e dimandano il perfezionamento de' metodi per l'invenzione, e le esatte applicazioni di questi a quistioni per ogni ramo di quelle, sieno pure, sieno applicate.

È un error puerile il confondere i principj di una scienza con la parte istrumentale di cui si ha bisogno per farla progredire; ed in questo i veri filosofi non cadon mai.

LXXV. *Matematiche pure e miste* — I loro reali progressi sono interamente dovuti a' metodi moderni (*pag.* XXVIII *e* XXIX.)

Per le miste la proposizione in parte l'è vera, ma non assolutamente; poichè nessuno oserà dire immaginarj que' progressi, ch' esse già prima, e contemporaneamente al Cartesio avevano fatti per l'applicazione della sola e pura Geometria in mano del Galilei e della sua Scuola, che tanto perfezionò principalmente la Scienza idraulica; dell' Ugenio, del Varignon, *ec.* Nè tampoco in mano del Newton prese la Meccanica in generale quello stato di sì alta perfezione, per opera assoluta de' metodi algebrici, avendovi anche contribuito, e non in poca parte la Geometria; ed in talune ricerche essendo sola e senz' altro ajuto bastata. Ma per le Matematiche pure, a non perdere inutilmente il tempo, ce ne rimetteremo a' tanti luoghi ove il contrario dimostrasi, e nel programma, e nelle *Esercitazioni* ad esso, e nell' *Analisi critica*.

LXXVI. *Meccanica* — Non dovere alla Geometria i suoi progressi, questa dover anzi a quella i suoi, perche furono le quistioni meccaniche, che diedero nascimento al *metodo delle prime ed ultime ragioni*, che arricchì poi tanto la Geometria (*p.* XXVIII.)

La proposizione dell' autor del programma alla quale si vuole assolutamente contraddire, è stata, *la Meccanica stessa dovere alla Geometria i suoi progressi*, il che non importa che glieli debba tutti; e che tal proposizione sia vera il conosce chiunque abbia letta la storia di questa scienza, che cominciò a divenirlo, da che l'immortal Gali-

lei, ed i suoi discepoli gli associarono la Geometria. Ed i *Principj Matematici* del Newton, e le opere di altri illustri geometri, che trattarono ricerche di Meccanica nella fine del secolo XVII, e che concorsero all'aumento e perfezione di tale scienza, il comprovano.

In quanto poi al metodo *delle prime ed ultime ragioni*, da cui derivò il Newton quello delle *Flussioni*, a tutti è noto che prese origine, del pari che il Calcolo differenziale ed il suo inverso, da' problemi delle quadrature, delle tangenti, de' massimi e minimi, e da altri che alla Geometria si appartengono, come lo stesso Newton il dichiarò in più luoghi, e specialmente nello scolio al lemma 11. lib. II. della sua prima edizione de' *Principj Matematici* del 1686, e nell'altra del 1714; nel qual lemma espose egli il fondamento del metodo delle *Flussioni*: nè però dal trovarsi qui recato poteva argomentarsene, che esso dalla Meccanica avesse tratta l'origine. E lo stesso pel metodo *delle prime*, ed *ultime ragioni*, che quel sommo uomo espose pure in tanti lemmi nella sez. 2. lib. I. de' suoi *Principj*.

Ed ancorchè fosse vero che questo metodo avesse da ricerche Meccaniche presa l'origine; qual ragione vi sarebbe, perchè applicatolo anche alla Geometria, questa dovesse alla Meccanica i suoi progressi? Ognuno conchiuderebbe doverli ad un metodo applicabile all'una ed all'altra. Ma i nostri *risponditori* han dritto di ragionar a lor modo, di ciò che non conoscono; ed ancor quello di contraddirsi da un momento all'altro, poichè erano essi medesimi, che connessamente alla proposizione di cui qui ragioniamo avevano pronunziata l'altra » che i nuovi metodi sommatorii presero la loro origine da' bisogni della Geometria.«

LXXVII. *Metodo Cartesiano* — Senza intoppo (*pag.* XIX.).

Ci disbrigheremo subito della presente proposizione, dichiarando non intendere cosa significhi quel *senza intoppo*, e cosa possano essere quest'*intoppi*. Ma pure se a noi lice interpetrar la cosa a modo nostro, un di questi forse potrebbe consistere nella *costruzione* cui ogni soluzione con esso dee assolutamente condurre; il che combinerebbe con la proposizione de' contraddittori da noi analizzata al *n.* LVII.

È però da osservarsi ch' essi poco appresso contraddicono a questa, ed all' altra riportata nel presente numero, col dire che » in tal me- » todo il ritorno dell' Algebra alla Geometria si rende spesse volte » complicatissimo «; il che per altro non sarebbe piccolo *intoppo*.

LXXVII. *Metodo di Lagrange*—Seguito ora dall'universale (*p.* IX.)

Limitando, come intendesi da' *risponditori* il *Metodo di Lagrange* a quello *delle Coordinate*, la proposizione su enunciata è falsa, non trovandosene nè men sempre fatto uso dagli stessi promotori del medesimo.

Leggansi gli *Annali* del Gergonne in più luoghi, le *Considerazioni* aggiunte al programma, e l' *Analisi critica* testè pubblicata.

LXXIX. *Metodi moderni* — Poggiano sopra principj chiarissimi e certissimi, ne hanno bisogno di esser confermati dalla Geometria antica (*pag.* XXIV *e* XXIX.)

Riscontrisi il luogo di Carnot recato dall' autor del programma a not. (*b*), convalidato dalla condotta di tutt' i sommi analisti, non esclusi il Newton, il Leibnitz; i Bernoulli, l' Eulero, *ec.* i quali hanno sempre desiderato di veder le loro scoperte fatte con l' Analisi algebrica comprovate dalla Geometria: su di che potrà riscontrarsi ancora il presente *Indice critico* in più luoghi, e specialmente nel *n.* VII.

Ed a tutto ciò aggiugneremo, che l' immortal Newton non volle esporre le sue invenzioni nella forma analitica come v' era pervenuto: ma dandogli veste prettamente geometrica, su di che l' illustre Wolfio così esprimesi: *Nullum mihi dubium est, quin quantum soli hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit* (*Newtonus*), *cum in divino opere Principiorum Philosophiae Naturalis mathematicorum, inventa praeclara methodo veterum geometrarum proponere decrevisset*. Ma nè pur contento di aver egli ciò mostrato col suo valevole esempio, volle anche stabilirne un canone, nell' introdursi al suo *Methodus Fluxionum*, vale a dire niente meno che a quel metodo analitico che formava la sua principal gloria, essendo stata la sorgente feconda di tutte le principali scoperte posteriori, ove il grand' uomo così espri-

mesi: *Indaganda est demonstratio constructionis, ut omisso, quatenus fieri potest, calculo algebraico, theorema fiat concinnum et elegans, et publicam lucem sustinere valeat*. E Giacomo Ermanno, dopo aver consumata tutta la sua vita nel calcolo algebrico, seguì appuntino l'insegnamento del Newton nella sua *Phoronomia*.

LXXX. *Metodo di Lagrange* — Con esso non si ha bisogno di conoscere alcuna proprietà della particolare figura che si considera (*pag*. LVI.)

Questa è una delle solite proposizioni avventurate a caso da' *contraddittori*, e senza intendere essi medesimi cosa voglian dire. La prima condizione, che richiedesi in trattare un soggetto, sia per dimostrarne qualche proprietà, sia per eseguirvi sopra qualche ricerca è quella di tener conto della natura di esso: e ciò il comprende non il matematico, ma ogni mediocre uomo di buon senso.

LXXXI. *Moderni* — Niente hanno perduto dell' antica Geometria; poichè molte delle opere che la costituivano sono loro interamente pervenute, e delle rimanenti Pappo ha espressi con chiarezza gli argomenti, ad eccezione forse del trattato de' Porismi... (*not. a pag*. XXVII. *e* XXVIII.).

Non dee far meraviglia questa franchezza a chi parla senza conoscere il soggetto su cui parla, e senza aver letto nè meno un de' moderni che delle cose degli antichi hanno ragionato; e nè pur per semplice curiosità la storia del Montucla.

Si riscontri Pappo nella tante volte citata prefazione al lib. VII., e si vedrà che de' XXXIII. libri del *Luogo di Risoluzione* appena ne sieno pervenuti a noi soli X. De' rimanenti XXIII, XIX. hanno potuto essere restituiti da valenti Geometri moderni, dietro le indicazioni di Pappo, e degli altri IV. alcuna specificata notizia non essendocene pervenuta, non hanno potuto essere affatto restituiti. Tali sono i due libri di Euclide *Locorum ad superficiem*, che di grandissima importanza dovevano essere per la composizione de' problemi li-

neari , e gli altri di Eratostene *de Medietatibus* , che formavano il compimento del *Luogo di risoluzione* , de' quali non si è giunti nè meno ad indovinare cosa fossero. De' tre libri de' Porismi assai mutilata e guasta n' è pervenuta a noi la notizia che Pappo ne dava : ed è curioso che i risponditori , che potevano ben riscontrarlo , se n' escano con un *forse* . Del problema delle tre , quattro o più rette , celebratissimo nell' antica Geometria , nulla pur ci è giunto . E dalle stesse preziose *Collezioni Matematiche* di Pappo rilevasi, che altri importanti trattati degli antichi geometri siensi disgraziatamente perduti (*Vegg. la nota (a) al programma*) : e queste stesse sono ancor mancanti de' primi due libri , da' quali certamente molte altre notizie si sarebbero raccolte delle cose degli antichi. In quanto poi al sentimento de' moderni su tal proposito basti ciò che se n' è detto nella nota poc' anzi citata , ed in diversi numeri del presente *Indice*. Intanto i nostri originali contraddittori hanno assolutamente deciso, che nulla siesi perduto dell' antica Geometria.

LXXXII. *Monge* — Compose un trattato di Applicazione dell' Algebra alla Geometria , nella quale opera i *fatti geometrici* , *specialmente quelli che riguardano il sito* , *vengono espressi da formole tanto eleganti* , *che bisognerebbe non avere alcuna attrazione pel bello* , per non gustarle (*pag*. XXXIII.)

In verità , leggendo questo bel giudizio del lavoro del Monge , ognuno crederebbe che si parlasse di un quadro di Raffaello , o di una statua di Michelangelo .

Or io, non intendendo affatto detrarre al merito di quel distinto analista , ed allo sviluppo , che per sua opera ha ricevuto l' analisi Cartesiana, solamente per quell' *eleganza di formole di fatti geometrici* , che tanta *attrattiva di bello* hanno pe' *risponditori*, mi permetterò ricordare ad essi , che secondo un loro critico insegnamento , de' metodi e dell' eleganza de' medesimi non se ne decide per *declamazioni* , ma da' fatti . E ben dunque non volendo qui tessere lungo parallelo di que-

sti , gli pregherò a riscontrare la dotta Memoria dell' analista Pietro Ferroni inserita nel tom. XVI. anno 1813 delle *Memorie della Società Italiana*, che vi troveranno non poche osservazioni su i risultamenti di un tal metodo in confronto di come può pervenirvi la Geometria , o anche l' analisi algebrica , che con quella a mano proceda. Ed ivi tra le altre cose ravviseranno un teorema nuovo ed elegantissimo del Monge, concernente la posizione del centro di gravità di tutte le piramidi tetraedre, da lui rilevato con la nuova analisi algebrica, e fatto inserire nel tom. VIII. della *Scuola Politecnica*, mentre è una conseguenza immediata delle più semplici verità elementari di Geometria. Similmente vi troveranno notata la dimostrazione dell'equivalenza di due triangoletti ricorrendo a considerazioni di *contrarietà di rotazione*, mentre con la Geometria è quasi intuitiva ; lo stesso per superficie di ogni maniera : e tante e tante altre cose , che l' analista italiano sempre con estrema facilità, per mezzo della pura Geometria , rileva , mentre col metodo analitico puro erano tali da meritare l'attenzione di un sommo analista come il Monge. Dal che il Ferroni deduce la giusta conseguenza, *goder in parecchi incontri la Sintesi geometrica ben maneggiata di eleganza e facilità superiore a quelle , che affaccia applicandosi alle quantità continue l' Analisi algebrica*.

Nè sarà superfluo l' aggiugnere ancor qui ciò che lo stesso Ferroni più appresso osserva sulla Memoria del prof. François, *de la transformation des coordonnées*, inserita nel poc' anzi detto *Giornale* t. VII., così dicendo : « Ognuno che si prendesse l' assunto di ben ponderare da » quali formole complicate un tal autore deduca il teorema primario » trigonometrico dell' eguaglianza cioè di *rapporto* de' *seni* de' lati a' » *seni* degli angoli opposti , in confronto dalla semplicità che si scorge » leggendone la derivazione a pag. 108 , 109 *de Paralleli* (è questo un altro lavoro dello stesso analista italiano inserito tra le *Memorie* suddette t. XII , ed io qui , senza andarlo a riscontrare , vi sostituirò la dimostrazione che ne dà il prof. Flauti nella sua *Trigonometria sferica*) » non potrebbe far a meno di non apprezzare per avventura

» quanto pervalga in siffatta materia la *Sintesi lineare* ». Nè quì egli si arresta, ma procede innanzi a mostrare come potrebbonsi rilevare le altre formole di Trigonometria sferica partendo dalle considerazioni geometriche della piramide triangolare isoscele. E dopo ciò va pur confrontando altre ricerche ottenute con la nuova analisi alle stesse ottenute con la semplice e pura Geometria. Ed io ho voluto produrre qui innanzi a' rispondditori al programma tali cose, perchè potessero servir loro di norma ne' giudizj, che senza maturo esame, e senza un esatto confronto, e lavorandovi sopra preventivamente, pongonsi ad avventurare sull' eleganza e valore de' metodi algebrico-geometrici, come in tanti numeri precedenti è stato da me osservato.

LXXXIII. *Problemi* — Del cerchio e de' tre punti, delle *Tazioni*, della piramide triangolare, e delle *Inclinazioni*, non sono forse gli Achilli della Scuola sintetica, e non si trovano elegantemente risoluti col metodo delle coordinate da Lagrange, da Puissant, da Gergonne, da Hachette, e da altri anche presso noi (*pag.* XLV.)

Nella Scuola del Fergola innumerevoli sono stati i problemi, che per esercizio vi si proponevano, trattati con l' Analisi antica, con la Cartesiana, e col Metodo degl' infiniti; e questi o già risolnti da distinti matematici, o del tutto nuovi. Nè alcuno pur ne ravvisiamo interamente di nuova congegnazione, che siasene prodotto in una recente *Raccolta di problemi* col metodo analitico puro, per opera di que' *contraddittori*, che ora tanto poco mostrano riputare le semplici ricerche geometriche, disprezzandole altamente, come lavori oziosi, e da non perdervi il tempo, nella loro *risposta*. Tra quelli era ben ragionevole, che non s' isfuggissero i più rilevanti, che avevano esercitate le menti de' geometri distinti di ogni età; e senza che noi stessimo quì a tesser la storia di ciascheduno, che non è questo il luogo proprio, ed al proposito n' è stato più volte ragionato, i principali tra essi sono stati quelli delle *Tazioni circolari* e *sferiche*; gli

altri *di Sito e posizione*, pe' quali il Fergola escogitava una nuova facil maniera di trattarli anche con l' Analisi moderna, soddisfacendo alle sagge vedute del Leibnitz, e de' Bernoulli; il *problema del Cramer*, quello del *Cilindroide del Wallis*, l' altro della *Piramide triangolare*, ed il famoso *delle tre e quattro rette*. Inoltre i teoremi analitici delle Sezioni angolari, *del Cotes*, *del Moivre*, *il problema inverso delle forze centrali*, e l'argomento importante dello *scindimento delle funzioni fratte in frazioni parziali*, ridotto per opera del Fergola a quella perfezione elementare che desideravasi, e per la quale ottenere, più volte vi era rivenuto sopra l' illustre Eulero. Ed a tutte queste ricerche vi è stato in modo adempito, da non rimanervi a parer nostro altro a desiderare; ed esse furono anche di spinta a matematici stranieri per occuparsene, come a chi conosce la storia delle Matematiche della fine del secolo XVIII. e principj del XIX. non dee esser ignoto.

Ma non il solo esercizio in problemi difficili, ed in astruse analitiche ricerche ha formato la lodevole occupazione del Fergola, e della sua distinta Scuola, per una continuata serie di anni, essendosi essi indefessamente rivolti a compiere que' trattati di scienza geometrica, analitica, e di applicazioni, che per una perfetta istituzione gli erano necessarj: nè ad una tale Scuola è stato bisogno straniero soccorso per qualunque ramo delle Matematiche, onde compiutamente istruirvisi, come può rilevarsi da' *manifesti* pubblicati più volte dal professor Flauti, ove il piano intero del Corso degli studj matematici, e le opere che vi erano destinate minutamente descriveva: che se queste non hanno poi avuto in effetto pubblicazione, ciò dee attribuirsi alla morte del Fergola principalmente; ond' è che la sua Scuola si rimase divisa e priva di riconcentramento, gli scritti suoi, com' è noto al pubblico, per molti anni abbandonati all' arbitrio di persone imperite che gli possedevano, nè vollero mai darli, nè meno alle larghe esibizioni, che gliene faceva la nostra R. A. delle Scienze; alle occupazioni moltiplici e nojose del prof. Flauti, che non gli permetteva-

no rivolgersi interamente a' suoi studj; e finalmente alla non piccola spesa che occorrerebbe per la pubblicazione, la quale nè meno potrebbe esser rimborzata dalla scarsissima vendita che se ne farebbe. Tra questi ci duole principalmente che rimanga neghittoso l'elaboratissimo trattato di un genere tutto nuovo, del Fergola, che col titolo di *Arte d' inventare* egli aveva composto ad uso della sua Scuola, onde istituirla a pieno di quel metodo delle antiche Scuole, che a giudizio de' nostri savj contraddittori non ha mai esistito, e su quelli della moderna analisi; del qual trattato cresce in noi tanto più il desiderio, rilevando dal ragionato manifesto che ne fu dato fuori nel 1809 qual prezioso materiale di scienza vi si contenga; e facciamo voti i più ardenti per la pubblicazione del medesimo.

LXXXIV. *Programma* — L' autor di esso volendo *saggiar la forza* del metodo di Lagrange, seguito ora dall' universale, avrebbe dovuto proporre i problemi a' geometri di tutt' i paesi, e non a' soli matematici del Regno delle due Sicilie, poichè se per disgrazia fra questi non si fosse trovato nessuno ben intenzionato in fatto di Geometria a due e tre coordinate, o che avesse voluto occuparsi del programma, i problemi non sarebbero stati risoluti col metodo di Lagrange, ed allora dall' insufficienza o dalla non curanza de' napoletani geometri sarebbesi argomentato della nullità di un tal metodo, e questo sarebbe stato un bell' argomento in *barbara* (*pag.* IX.).

Nessun luogo del programma, per quanto può scorgervi occhio non maligno e non prevenuto, dimostra che sia esso assolutamente diretto a saggiar la forza del solo metodo analitico puro. Questo è quello che posso da me notare sulla lunga diceria di quì sopra; pel reato, come non sono avvezzo a far l' indovino delle altrui intenzioni, nè volendo prender norma dal sistema de' contraddittori al programma, me ne rimetto alla *Dichiarazione* premessa dall' autore alla ri-

stampa di quello. Fo solamente osservare, che avendo essi detto esser ora un tal metodo *seguito dall' universale*, non pochi vi dovevano essere presso noi, che avrebber potuto in quel modo rispondere, risolvendo le quistioni, e non già vendendo come suol dirsi lucciole per lanterne, senza risolverle (*Vegg. la nota* (*s'*) *agg. al progr. ed i num. II. e III. dell'* Analisi critica *del mio collega*); e proccurando merito al vano lavoro sol vomitando impertinenze ed errori.

LXXXV. *Programma* — Esso non ha avuto il lodevole scopo di promuovere la scienza. Ma le quistioni di esso furono dall'autore del programma proposte e dirette principalmente a' coltivatori della Geometria Lagragiana suoi oppositori, sfidando essi ed il metodo a discender nell' arena, come se la sospirata disfatta di costoro avesse potuto bastare ad elevar l' opinione di lui al di sopra di quella degli scienziati di tutte le nazioni . . . (*pag.* LXII.).

L' autor del programma comincia dall' enumerare ciò che siesi operato dal Fergola e dalla sua Scuola fin dal 1810, perchè col fatto s' istituisse parallelo tra l' energia ne' problemi geometrici del metodo analitico puro col Cartesiano, e con l' antica Geometria; ed allora i contraddittori al programma, o erano appena iniziati nelle Matematiche, o non ancora esistevano. Se dunque ciò ch' egli ora dimanda non è che una continuazione di quello che fin d' allora volevasi, come potranno i contraddittori in modo alterarsi di fantasia da credere, che il programma fosse a loro soli diretto? E non esistono dunque altri coltivatori del metodo puro nel nostro regno oltre essi? È questa una strana proposizione altrettanto sciocca, quanto altera; dal pari che pretendere, ch' essi possano esser considerati dal pubblico come *oppositori* dell' autor del programma, la cui considerazione, pe' tanti utili servizj resi alla scienza ed al suo paese, non è da porsi al paragone con persone prive di questi meriti, e ad un rango assai più basso di quello che l' altro occupa. Certamente che nessun

altro, che avesse letto il *programma* sarebbe mai andato con l' idea, che fosse loro diretto, se non essi, i quali, digraziatamente, vedevano ne' principj di scienza in quello stabiliti la deficienza di loro conoscenze, per poter stare al rango di matematici, ed il cattivo governo che fanno della povera gioventù, che costretta da necessità è sotto la loro istituzione, dalla quale nulla raccoglie, come gli esami a' gradi diversi della carriera di architetti civili continuamente dimostrano.

E qual' è mai la voluta *disfatta* desiderata dall' autor del programma, di che, e di chi? Colui dunque che dimanda la risoluzione di problemi, e che con diverso metodo si tentino, per paragonar le energie di questi, tende alla disfatta di alcun di essi? Tenderà egli ad illuminare costoro di non coltivarlo esclusivamente; a provvedersi di que' soccorsi, che posson trarre dallo studio degli altri metodi; a persuader loro che la Geometria è assai antica, nè è possibile di procetler oltre in essa, dimenticando affatto i progressi che ha fatti per più di venti secoli, ed in mano di uomini sommi, degni del rispetto ed ammirazione nostra, e non di esser trattati come alunnetti di scuola, se non da chi non sa nè meno guardare su' loro preziosi lavori. Ecco quello cui mirava il programma; ed essi con la loro *risposta*, che non mai crederemmo derivata da supposizione di provocamento, hanno confermato due cose, la prima di non avervi il Padula fatto altro che prestare il nome, nascondendosi dietro la tavola i suoi istitutori, che ben dovevano vergognarsi di tal loro sciocco ed indecente procedere, se la loro coscienza non è del tutto estinta, o soffocata da ingiuste e mal fondate passioni; l' altra che ben ragione aveva l' autor di quello di dire, che bisognava porre un qualche ostacolo alla cattiva maniera d' istituire, della quale non si poteva dare maggior argomento in confermarne la verità, che la *risposta* pubblicata, come dal presente *Indice* abbastanza ognun rileva. Ma poi credevano essi a loro diretto il programma? e bene, qual miglior mezzo di far tacere, e confondere l' autore del medesimo, che dando le

soluzioni de' quesiti di esso nel modo dimandato? L'Accademia delle Scienze doveva essere l' arbitra della decisione, cui l' autor del programma si era convenevolmente diretto, ed al cui giudizio deve egli assolutamente stare, e non a quello de' *rispondilori*, i quali hanno cantata vittoria con insolenti dicerie, e nulla operando: e quella addicendo ad essi il premio, avrebbe fatta finire in loro onore e vantaggio la supposta disfida.

Che poi l' autor del programma avesse nella pretesa disfatta creduto di elevare l' *opinione di lui al di sopra di quella degli scienziati di tutte le nazioni*, l' è un discorrer da ragazzi; poichè nè quello ha ancor bisogno di procacciarsi ora un' opinione, nè altro merito aveva nel presente affare, che la proposta delle quistioni, le quali nè meno erano di sua escogitazione, ma di altri e già trattate, e la pia intenzione di animare il coltivamento della scienza, per quanto era in suo potere, anche facendo lo sforzo di accrescere un solletico ad impegnarvisi con un premio, che per quanto sia tenue l' è pure impare alla sua scarsa fortuna. Il merito ne sarebbe risultato, e ne risulterà a chi adempia a' quesiti nel modo dimandato, al che essendo ben sicuri di non esser riesciti i contraddittori, hanno preso l' espediente di pubblicare le loro pretese risposte, sottraendole al giudizio de' dotti componenti la classe matematica della nostra R. A. delle Scienze: e per coonestare la loro maligna intenzione in voler divertire la cosa, si sono indecentemente rivolti a trattarlo con villanie, che se ritornano sempre a danno di chi le profferisce, in questa circostanza più che mai ciò è avvenuto. Ed a me anzi pare, che piuttosto ad essi l' indecente modo di procedere gli avesse fatto sperare di formarsi una opinione, stando a fronte di vecchi e distinti professori.

LXXXVI. *Programma* — Varie opinioni sul terzo quesito di esso (*in diversi luoghi della risposta*).

A quanto agli spontanei *contraddittori* è piaciuto asserire sul terzo quesito nulla posso aggiungere, dopo quello che dottamente se n' è det-

to dall' autore del programma nella not. (*u*) ad esso, e nelle *Considerazioni*, e dal mio collega nell' *Analisi critica al n.* IV. Farò solamente osservare, che coloro prima, per difetto di scienza diretta sulla natura de' problemi, il diedero per assolutamente impossibile (*giorn. dell'* Omnibus *del dì 11 mag.*): posteriormente, meglio istruiti dalla pubblica lettura, che l' autor del programma fece in Accademia delle sue *Considerazioni* sul medesimo nella prima tornata dell' agosto, cominciarono a rivenire dalla già propalata erronea opinione, e nel dar fuori la *risposta*, lo asserivano semplicemente come più che *determinato*, e recavano in una nota un solo caso di determinazione, cioè quello delle piramide isoscele a base equilatera, nè si avvidero, che potessero, oltre a questo caso, aver luogo altre relazioni tra gli elementi noti della piramide proposta, da rendere due delle sei equazioni, che a prima vista si presentano per tal problema, socie delle altre quattro, dandone così di esso la *dioristica* soluzione; e ciò a loro che tanto valgono ne' maneggi analitici, sarebbe riescito assai facile. Il che essendogli stato notato da taluno di nostra Scuola, facendo essi circuire continuamente, per sapere ciò che della loro produzione si pensasse, aggiunsero nella *prefazione* alla *risposta*, che con ordine inverso pubblicarono circa un mese dopo questa, qualche altra cosa relativa a siffatto assunto, che basta a mostrare esser essi del tutto rivenuti dalla falsa opinione non solo dell' impossibilità assoluta del problema, ma eziandio della più che determinazione, ascrivendolo senz' accorgersene tra' *problemi dioristici*; e quindi ammettendo ciò che dall' autor del programma nelle *Considerazioni*, e poi dal mio collega nell' *Analisi critica* si è detto intorno a questo difficil problema.

E volendo ancor io imitarli una volta sola; poichè questa facoltà è un contagio che presto si comunica, indovinerò la loro coscienza in ciò esser quella della difficoltà della quistione, e della deficienza di loro forze in trattarla, non potendo in essa calcare, come al solito, le altrui vestigia, perchè non ne trovano segnate. E

non dubito, che se la vera scienza, l'assiduo lavoro, ed ancor la fortuna farà riescirvi altri, essi subito non corrano con le loro solite metamorfosi algebriche a renderne propria la soluzione.

In fine a che tanto declamano contro l' autore del programma, per aver detto, che questo problema *compirebbe* ad un tratto (cioè *nel tempo stesso*, spiegazione necessaria pe' risponditori al programma, che l' hanno con molta attenzione ricercata) *le due Memorie del prof. Flauti, l' una de' contatti sferici, l' altra della piramide triangolare.* È forse questa qualche nuova bestemmia, pari all' altra, che il problema del Malfatti *servirebbe di convenevole compimento a quelli delle Tazioni!* Ma il problema non si risolverà, e però quelle due Memorie *non avranno*, com' essi dicono, *quel compimento che l' autor del programma si augurava:* e che però! I geometri antichi per lungo tempo non poterono risolvere il problema di *trisegar l' angolo, e duplicare il cubo;* dunque doveva tornare in derisione di que' saggi che li proposero, l' aver data una tale spinta alla Geometria da tendere al suo perfezionamento, per la natura e distinzione de' problemi, e per la scoperta di gran numero di verità nuove, donde tante soluzioni poi se ne ebbero? Lo stesso avvenne pel problema *delle tre e quattro rette*, che tanto utile fu ad estendere la dottrina su' Conici fino ad Apollonio, che riescì in compiutamente risolverlo. Fino ad Archimede fu impossibile il dimostrare molte verità *sulla sfera, e sul cilindro, e sulle conoidi e sferoidi*, ed egli stesso vi durò non poca fatica, sicchè arrivò a dire a Dositeo, cui le dirigeva: *Mitto tibi conscriptas in hoc libro reliquorum thorematum demonstrationes, quae inter priores jam missas non habuisti; aliorumque item, quae postea inventa sunt: quae quidem cum antea saepe aggressus essem perscrutari, multumque difficultatis habere videretur, diu animo perpendi: atque hoc in causa fuit, cur haec ipsa, quae proposita erant, una cum aliis edita non sint.* Nè però egli meritò di esser da' suoi contemporanei motteggiato, per occuparsi di ricerche alle quali non erasi riescito per lungo tempo.

E questo sommo geometra inviando pure a Dositeo il suo libro delle *Spirali* gli diceva : *Quot sunt enim theoremata in Geometria , quae cum principio videantur via et ratione carere ad cognoscendum , tempore fiunt manifesta ? Conon quidem cum tempus sibi sumpsisset ad haec scrutanda minime idoneum , vita decessit , eaque obscura reliquit ; licet his omnibus , aliisque plurimis inventis , longe Geometriae fines amplificaverit.* E nel proseguimento di questa sua lettera non manca di notare , che altri dopo Conone non avevano nè men osato tentarle . Lo stesso ebbe luogo per la *quadratura del cerchio* , e per tanti problemi dell' antichità rimota . Nè tra' moderni mancano di ciò frequenti esempj , pe' quali, a fin di non riescir tediosi a' lettori , basterà addurre que' due soli , che sono in presenza , il problema di *Cramer* , cioè , e l' altro di *Malfatti* .

V' è tutta la speranza, che i nostri valenti geometri, i quali sono intenti a risolvere il *problema della piramide* , premettendovi la conveniente determinazione, vi riescano ; ed allora saranno compiti i voti dell' autor del programma, per questo compimento aggiunto alle due succennate Memorie . Ma se ciò per disgrazia della scienza non avverrà per ora , tali lavori del nostro distinto professor Flauti non avranno nulla perduto di loro merito intrinseco ; e rimarranno sempre le sue soluzioni de' problemi de' *contatti sferici* , come le più eleganti che in tale importante argomento, trattato da' primi geometri per ben due secoli , siansene effettuate col metodo degli antichi : e tornerà a di lui merito , ch' egli abbia , col principal problema della *piramide triangolare*, dato alla scienza quella spinta, ch' è stata feconda a terminare e compiere non solo un tale argomento , ma l' altro assai più generale trattato dal prof. Bruno , e proseguito dottamente dal distinto matematico francese sig. Hachette . Così giudica delle cose chi cerca la vera scienza , la coltiva assiduamente studiando , e non si fa sorprendere da passioni e da bile ingiusta , fino a travedere sulle cose più lodevoli , stravolgendole in sarcasmi e satire , che vi vuol poco a scriverle ,

molto però a sostenerle, e che il più delle volte ritornano in ludibrio di chi le scrive senza giudizio e senza riflessione.

LXXXVII. *Quesiti* — Del programma (*Risp. ad essi* p. 1 a 13, 14 a 42, 42 *alla fine*).

Su di questo argomento non tarderò ancora il lettore, annojandolo con ripetizioni di quanto poteva dirsi, e che ha notato l' autor del *programma* nella *dichiarazione* premessa alla ristampa di esso, nelle note (*r*), (*s'*), (*t*), (*u*) aggiuntevi, e nelle *Considerazioni* che il seguono; ed il mio collega, nell' *Analisi critica*, dal n. I. al IV. (*Vegg. anche il num. prec.*)

LXXXVIII. *Rigore ed esattezza geometrica* — Sono, nel fatto, cose pressochè ideali (*pag.* XLI. *e nota*).

Astratta è la Geometria, e però il suo procedimento scientifico dee essere rigoroso ed esatto. La linea, la superficie, il corpo che si considera dal geometra non sono quelli che si rappresentano; la perpendicolare, la parallela, il cerchio che si descrive su di un piano, la tangente ad esso, *ec. ec.*, non sono esattamente quelle che considera il geometra: ma che perciò la Geometria non dovrà concepir tali cose nello stato perfettissimo ed astratto, ed in questo stato ricercar le proprietà di esse? Sarebbe questo un nuovo attacco contro tale scienza, peggiore dell' altro de' pirronisti. Se i contraddittori vogliono considerarla come scienza pratica, siamo fuori di ogni quistione; ed allora era inutile di parlar di metodi, di loro efficacia, di eleganza di soluzioni, e delle soluzioni stesse; poichè queste praticamente possono, e si eseguono spesso tutt' altrimenti dal modo come esige la Geometrica scienza, e non pratica di artista. A che tante ricerche e quistioni sul problema della trisezione, se il disegnatore lo risolve con la semplice apertura di compasso, e ad occhio? I contraddittori avranno in tutto ragione, e poche conoscenze imperfette di Geometria, e di calcolo basteranno a tutto; solamente avranno avuto il torto, in non aver saputa da principio dichiarar bene la loro intenzione esser quel-

la di voler considerare la Geometria come arte, e di essere entrati in contesa sopra di essa come scienza. Si avrebbero avuto tutto a lor modo, se avessero a tempo manifestata la loro nobilissima idea, e si avrebbero pur risparmiata la pena di tutti gli artifizj usati per accomodare le soluzioni a' primi due quesiti: e noi saremmo fuori causa, nè avremmo impiegato inutilmente il tempo a parlar ragioni a coloro, che non intendono che pratiche ed usi. Ma, il ripetiamo, perchè entrare nella messe altrui, e trattare quistioni sulla Geometria astratta? al qual titolo diveuta un imperdonabile errore, che *il rigore e l' esattezza geometrica sieno cose pressochè ideali*.

LXXXIX. *Sito* —Relazioni di esso espresse numericamente dal Lagrange, traducendo in formole generali le più semplici operazioni e i fondamentali teoremi della Geometria elementare, le condizioni di contatto, e simili, col mezzo delle coordinate de' punti fissi e de' punti variabili, non che degli angoli, che le rette ed i piani fanno tra loro, e con gli assi e co' piani coordinati (*p.* XLIII.)

Chi espresse le cose di quassù, mostrò di non aver alcun' idea di ciò che geometricamente dicesi *sito* o *posizione*, e di non comprendere cosa sieno quelle equazioni algebriche di condizione, che dice *relazioni di sito numericamente espresse*; non che d' ignorare tutto lo stato della scienza geometrica anteriore alle cose di cui parla, che crede dal Lagrange assolutamente introdotte.

Il *Sito* è per sua intrinseca natura solo geometricamente considerabile, nè le sue *relazioni*, perchè prendano forma analitica, perdono di loro natura, diventando *numeriche*, come non perde di sua natura il continuo, se a misura si sottoponga per gli usi: e quelle forme algebriche nè meno sono assolutamente numeriche, come per imperizia equivocasi in più luoghi nella *risposta*. E perchè i contraddittori al programma intendon meglio le autorità, che il ragionamento, riporterò qui il seguente luogo dell' Horsley: *Figurae scilicet, quotquot*

sunt, lineis constant vel pluribus, vel curva fortasse una. Linearum vero plurium, ut et partium ejusdem curvae variarum, relatio duplex est: Quantitate *etenim distinguuntur*, et Situ. *Meras quantitatis relationes,* meras *autem dico, quae ex situ nullo modo pendent, optimo certe compendio Algebra expendit, et ex notis ignotas mira facilitate promit. — Situs linearum varios dignoscere, et cum alias omnes, tum et ipsius quantitatis relationes, si quae ex situ oriundae, vel lineis ipsis, vel figuris quas lineae claudunt, intercedunt, explorare, id, ni fallor, Geometriae munus est. In problematibus plerisque, solutio ex utraque relatione pendet, Situs dico et Magnitudinis: vel compendiosius saltem ex utraque junctim, quam ex hac vel illa seorsim elicienda est. Positiones enim linearum diversas, intersectiones, contactus, angulos, flexuras, et quae plurima inde forte consequantur, quae vix fieri potest ut prudentiorem paullo* Geometriam *vel lateant vel fugiant*, calculus *saepissime praeterire solet. Unde haud raro evenit, ut qui aequationibus concinnandisi nimium se delectari sinunt, exitu operis, quod brevi sane, et nullo fere negotio, conficiunt, in constructiones aut nullas plane incidunt, aut perplexas adeo, et laboriosas, ut omni prorsus utilitate careant. Algebrae autem ita demum legitimus erit in Geometria usus, si in* rebus calculi solis *adhibeatur. Neque tamen Geometris auctor essem, ut eo studium atque artem potissimum intendant, ut ad calculum rem quamque propositam deducant. Imo contrarium suadeo. Constructiones enim simplicissimas, et facillimas esse, quae ex positionibus partium figurae petitae sunt, multiplex me experientia docuit. Sed cum, indagine rite instituta, omnibus datorum et quaesitorum, tam situs quam magnitudinis, relationibus diligenter perpensis, eo tandem, sua quasi sponte, res devenerit, ut mero calculo ulterius prosequenda sit, nollem sane, caeca adeo veneratione, antiqua amplecti, ut, in tali negotio, recentiora Algebrae compendia ingratus spernerem. Neque minus imperite et inepte faciunt, meo equidem judicio, qui in rebus calculi Algebra uti nolunt, quam qui in re-*

bus graphicis , *Geometria* , *id est Graphices scientia* , *multum valere iussa* , *maxima quaeque problemata mero calculo aggressi* , *Geometrarum munere praeclare se defunctos existimant* , *dummodo aequationes utcunque concinnaverint* (Inclinationum *lib. II. rest.*). Ho voluto quì recare quest' intero bellissimo luogo dell' Horsley , quantunque non tutto riguardasse il presente argomento ; poichè da esso molta luce si spande ancora su tanti articoli precedenti , circa l' uso proprio della Geometria, e dell' Analisi algebrica. Ed avvertasi che l' epoca in cui l'Horsley così esprimevasi , aderendo al sentimento di tutt' i sommi geometri ed analisti moderni , non esclusi il Leibnitz, i Bernoulli , e 'l d' Alembert , era già quella in cui l' illustre Lagrange figurava in Europa, ed aveva abbastanza indicato , ne' *Miscellanea Taurinensia* , a qual grado avrebbe egli elevata la scienza del calcolo. Nè più oltre bisognerebbe estendermi in tale assunto , se avessi a fare con persone istruite al di là de' limiti di qualche modernissima istituzione ; che ben è noto l' ostinazione procedere inversamente alla scienza , come , se non altro , il fatto de' *trisegatori* e de' *duplicatori* ogni giorno dimostra. Soggiugnerò dunque che di quelle equazioni di condizione esprimenti , secondo essi , *relazioni numeriche di Sito* ne usava la Geometria antica , nella forma ad essa propria , ne' tanti luoghi geometrici che aveva preparati , per quell' analisi geometrica , che si eseguiva *a caso* ; e ne ha poi , in forme più prossime alle attuali , usato la Geometria Cartesiana prima del Monge : e solamente dopo questo con maggior lusso se n' è fatto uso , e se ne fa , di quello che conferisca all' utile della scienza geometrica ; di che precisamente si sono sempre doluti il Fergola , ed il Flauti , riguardando così non alla semplice e nuda analisi algebrica del problema , ma alle equazioni finali per essi , ed alla loro costruibilità , che forma l'oggetto principale della soluzione. È questo il punto preso ad esame col programma , per chiarirlo con fatti : ed io spero , dall' acume e dall' espertezza dell' autor del programma , che dovessimo raccoglier qualche cosa di buono dal parallelo da lui promesso. Solamente

per ora farò osservare, che il Gergonne non mancò di accorgersi, che quelle relazioni di sito, che ora assolutamente per la natura delle equazioni locali che si adoprano, introduconsi in ogni problema, sono sì aliene dalla loro soluzione, e superflue alla costruzione, che questo esimio coltivatore di un tal metodo, categoricamente afferma, non doversi le *costruzioni di Geometria analitica riputar buone*, *se non quando si è pervenuto a renderle interamente scevre dal sito degli assi* (Ann. vol. IV. pag. 349). Si vegga da ciò, se così procedendo indifferentemente nelle soluzioni algebriche de' problemi geometrici sia un semplificarle, o un divergere dall' eleganza di esse; e se possa aver luogo con vantaggio della scienza quella *traduzione in formole generali delle più semplici operazioni e fondamentali teoremi della Geometria elementare*, che per altro confesso ingenuamente di non conoscere affatto qual sia, e credo esister tutta nell' immaginazione viva de' risponditori al programma, che ben si potranno accorgere di loro errore, se, riflettendo su quelle formole, arriveranno a comprendere, che esse racchiudano in loro necessariamente le operazioni grafiche elementari che la Geometria esegue, e que' principj di scienza che con esse algebricamente si rappresentano. Si è altrove detto, e quì il ripeto, che gli elementi di Geometria con metodo prettamente analitico algebrico non possano ottenersi, per intrinseca deficienza del metodo che si adopra, al che aggiugneremo in conferma il seguente notissimo luogo del Wolfio: *Non tamen omnia per calculos algebraicos erui possunt; quae ad Geometriam spectant. Patet id ex ipsa Geometria elementari. Etenim quae ibidem de lineis perpendicularibus, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia et similitudine triangulorum, aliisque nonnullis demonstrantur, per Algebram investigari nequeunt. Pendent enim haec a situ linearum, quem ad se invicem habent. Calculus vero Algebraicus est Calculus magnitudinum, non situs. Unde Leibnitius in Analysi recentiori adhuc desiderari monuit calculum situs, a calculo magnitudinum prorsus diversum. Quem tamen nec ipse dedit, nec*

dedit adhuc alius , sed in desideratis numeramus . E poco dopo così soggiugne . *Enimvero jam supra monuimus per calculum litteralem qui nonnisi magnitudinum calculus est , non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata , sed quaedam pendere a situ , ad quae investiganda et analytice demonstranda peculiaris requiritur calculus situs . Quodsi Analysis situs fuisset reperta , non inconsultum foret integra Elementa Euclidis analytice demonstrari ; ut inter methodum veterum et Analysin recentiorum clarius pateret differentia . Quodsi quis eam investigare voluerit , is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes , veluti quod* punctum *sit situs sui unicum , quod* circulus *sit figura plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eum dato eundem situm habent , quod* linea *una sit ad alteram* perpendicularis , *si punctum quodcumque in ea assumtum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum* . (E qui spiega come Euclide cosa intendasi per questo sito unico) . *Praeterea opus est ut novo calculo , calculo nempe situs : quem investigaturus perpendere tenetur , calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis, sive primitivis , sive derivativis, per continuam aequivalentium substitutionem* (§. 298 Psych. Emp.) *Hinc enim conficitur , diversos determinandos esse situs possibiles , eorumque excogitandos characteres , et ut hoc legitime combinare liceat , requiri axiomata quaedam generalia , aut , si mavis regulas quasdam generales , quibus perficitur combinatio et substitutio.....* Or io per me ignoro che questo calcolo de' siti , e questa Geometria elementare pel medesimo siesi fatta. Se essi conoscono tali cose, o l'hanno inventate , le producano ; ed allora avrà luogo ciò che hanno asserito: ma se no , tutto quello che han detto è nella loro sola testa, ed un puro sogno.

xc. *Verum concessum* — Non era che un teorema o un problema registrato nel Luogo risoluto (*pag.* x.)

Sia benedetto Iddio, che questa volta i contraddittori sono conseguenti a loro stessi , ed avendosi formato un *Luogo risoluto* a lor modo , vi ragionan sopra analogamente . Essi volevano che quello fosse

una selva di problemi e teoremi; ed è però ben naturale, che pensassero doversi ivi incontrare in ultima analisi quella conseguenza fattibile. E quando la cosa non fosse in quel modo, come si è veduto nel *n.* LXXI, cesserà anche di esser vero ciò che ci dicono del *verum concessum*. Che se non si fossero a capriccio persuasi, non posseder gli antichi vera scienza geometrica, e però gli avessero assolutamente banditi dalla coltura matematica; non dico già che avrebbero corretto il loro errore riscontrando Pappo, dal quale era facile rilevare cosa contenessero que' libri del *Luogo di Risoluzione*, come procedesse l'antica analisi, e quindi che fosse quel *Verum concessum*. Ma poichè essi consideravano questo scrittore come un'inutile *rapsodista* di viete, e spregevoli cose, non avrebbero però dovuto, essendo istitutori di scienza geometrica, fare a meno di gettar l'occhio anche fugacemente sulle opere di Euclide, Archimede ed Apollonio; che non lice a chi professa una tale scienza a dì d'oggi ignorar quello, ch' essa fu ne' suoi primordj; e se anche di quelli non si avesse più affatto bisogno, conveniva pure avervi qualche riguardo, per la (mal fondata a loro giudizio) gravissima autorità di sommi uomini moderni, che in tanto dispregio non gli tennero, anzi gli onorarono grandemente. Che se ciò avesser fatto, avrebbero sicuramente avvertito, che in alcun de' problemi che questi risolvono nelle loro opere, recandovi la corrispondente analisi geometrica, non fecero mai menzione di *Luogo risoluto*, nella riduzione cui pervennero; ma sempre o agli *Elementi* si riportarono, o ad altri problemi già prima da essi risoluti. E per tal modo avrebber veduto, che quel *Verum concessum* non istava tutto tutto in quel *Luogo*; e forse si sarebbero da ciò indotti a ricercare più attentamente quello ch' esso era. Ma siffatta discettazione è al presente del tutto vana: ed i giovani rileveranno cosa fosse il *Verum concessum* dal luogo di Pappo riportato al *n.* LXXI., in fine del periodo ove questo dotto raccoglitore delle cose geometriche degli antichi descrive l'*Analisi*.

CONCHIUSIONE.

E quì termino quest' *Indice critico*, non perchè la materia per esso fosse del tutto esaurita, che non mai videsi produzione dell'umano ingegno, a forze riunite, sì feconda in rimarchevoli errori, asserimenti arbitrarj, enfatiche espressioni, e palpabili contraddizioni, come la presente. Ma a me fa già ribrezzo di aver soverchiamente annojato il lettore; ed altronde parmi aver fatto rilevare a' giovani più di quello che bisogni, per porli in caso di non lasciarsi soprendere da false dottrine: nè per altro oggetto, come da principio dissi, intrapresi questo mio lavoro, al qual solo riguardo il raccomando al pubblico compatimento. Nè credo di meritarmi per esso, da' dotti ed inesorabili contraddittori, la taccia di un semplice e puro *declamatore*, come hanno osato dire dell'autor d' un programma di appena nove pagine in 8°, mentre vi opponevano la lunga chiacchierata di pag. LXVII. in 4°, col titolo di *prefazione* alla *risposta*, che avevano già prima pubblicata, da cui sono stato indotto al presente *indice*; nel quale mi sono limitato, per ogni articolo, a poche ragioni, o autorità, che di più non faceva bisogno, essendo esse come massime ecumeniche de' matematici. E voglio sperare, che avvertiti dalla *dichiarazione*, e dalle *Note aggiunte al Programma*, dalle *Considerazioni* sul medesimo, dall' *Analisi critica*, ed anche da questo mio lavoruccio, dell' importanza delle quistioni proposte, e di non aver ad esse affatto adempito, come si eran lusingati, non che delle false dottrine, che deviano le loro menti dal retto sentiero in coltivare i metodi, e saperne a proposito usare, vogliano raddoppiare i loro sforzi, onde soddisfare a quelle, ed ancora alle altre, che incidentemente veggonsi indicate ne' diversi luoghi delle succennate produzio-

ni (*) , con quel metodo , che loro piacerà , e potrà meglio riescire ; e persuadersi una volta , che l' autor del programma , e noi della sua scuola siamo indifferenti ne' metodi geometrici , studiandoli , apprezzandoli , ed adoprandoli tutti con egual predilezione ; che sarebbe veramente strano il privarsi di un qualunque ancor minimo vantaggio , che da alcun di essi potesse all' uopo ritrarsi . E lo stesso consigliamo ancor loro , se vogliono , piuttosto che perdere il tempo in vane dispute , adoperarlo a vantaggio della Geometria , per la quale dimostrano qualche compatimento . Ed io , che non ho già presa la penna ad offendere coltivatori della stessa scienza alla quale son dedito , ed a deprimere il loro merito, avvilendo il decoro del proprio paese , per bassa gelosia , ma al contrario per amor della verità , e per porre la cosa nel suo verace aspetto ; in nome della Scuola nella quale sono stato istituito , ed alla quale mi pregio appartenere , prometto a' contraddittori tutti quell'amicizia, e buona intelligenza , ch' è tanto necessaria per cospirare al perfezionamento delle Matematiche , e della istituzione in esse nel nostro paese ; onde questo , non menomato al presente di quella gloria letteraria, di cui non è stato mai scarso , possa trasmetterla alla gioventù , invece di essere ad essa esempio di scandali scientifici , e di vituperevoli quistioni . Concorrano dunque i nostri non più *contraddittori* a sì nobile scopo ; e dimentichi noi di tutto ciò , che fuor di proposito finora è stato da' medesimi con poca accortezza operato contro una generosa, ed utile proposta , a solo oggetto di frastor-

---

(*) Vedi — *Dichiarazione* a pag. IX, e X. — *Programma* a pag. 8, e not. (*o*)— *Considerazioni* , nella nota n.23 a pag. 46 , nell' altra n.25 a pag.55, a pag. 58 , e nella pag. 111. in fine del n. 2. — *Analisi critica* in fine del n. I. ; not. 29. ed in fine del n. III. ; ed in altri luoghi ancora .

narla, accetteremo volentieri la loro opera, loderemo i loro sforzi scientifici in coltivare, promuovere, e perfezionare, se ad essi così piacerà, il metodo analitico puro, imitando in ciò il Gergonne, illustre coltivatore di questo, il quale rivolse le dispute, che gli si facevano, in vantaggio del medesimo, promovendolo effettivamente. Per tal modo costituendo di tutti noi una sola famiglia, concorreremo egualmente al decoro del nostro paese; ed imploreremo da' nostri concittadini, a'quali come soli era diretto il programma, così speriamo, che soli sieno stati a giorno delle indecenti conseguenze di esso, di dimenticarle affatto, considerandole come que' disgusti passeggieri tra fratelli amantissimi, che non lasciano, dopo pacificati, alcun vestigio di loro esistenza, perchè così torna a vantaggio, e decoro comune.

A CHI LEGGERA'

La fretta indicibile con la quale sono stati scritti, e contemporaneamente pubblicati i presenti fogli, poichè la circostanza il richiedea, ha fatto scorrervi per entro taluni errori, de' quali i principali avvertiti sono i qui appresso; raccomandando gli altri alla bontà, e pazienza del lettore.

Pag.		linea		
XII	*Dich. v.*	13	vi messa	vi fu messa
12		3	*data*	*dato*
		9	dubito	dubitò
26	*Consid.*	1	isoscele	isoscele a base equilatera
46		14	della	dalla
48		21	Steiten	Steiner
50		21	SS''	SS'
63		18	ammessa	ammesso
74		11	de'	da'
85		10	quale	quali
88			Alla costruzione corrisponde la *fig.* 3.	
119		8	26 e 28	28 e 29
162		17	di verrebbero	diverrebbero
184		25	racare	recare
193		10	*proprietibus*	*proprietatibus*
198		31	*volent*	*valent*
206		26	e	a
215		15	*ad quam*	*ad quem quasi*
217		19	delle curve	delle linee, e superficie curve
218		30	fin 1814	fin dal 1814
219		4	la	le
		5	potrà	non potrà
220		2	e poichè	; poichè
228		2	*in fine* vi manca il *punto* ?	
234		25	si	sì